

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

Természettudományi Kar

Elméleti Fizika Tanszék

informatikus-fizikus szak

DIPLOMAMUNKA

Nem egyensúlyi fázisátalakulások vizsgálata
komplex hálózatokon

Karsai Márton

Konzulens: Dr. Iglói Ferenc

2005.

Kivonat

Diplomamunkám célja, nem egyensúlyi fázisátalakulások vizsgálata élsúlyozott skálamentes hálózatokon. A vizsgált $\gamma = 3$ paraméterű Barabási-Albert hálózat élsúlyozása során figyelembe vettem, hogy a korábban hálózatba került pontok nagyobb eséllyel immunizálódtak a hálózatban terjedő fertőzéssel szemben.

Módszerek: Feltevésemet Giruaniuc [1] cikkében közölt egyensúlyi fázisátalakulásokra bizonyított elméletére alapoztam, miszerint egy k_i és k_j fokú pontok között futó élhez $\lambda_{i,j} = \lambda(k_i k_j)^{-\mu}$ szerint élsúlyt rendelve a dinamikus átlagtér-közelítés megoldása a $\gamma' = (\gamma - \mu/(1 - \mu))$ effektív foksám exponenstól függ. Ennek igazolására hosszúidejű numerikus szimulációkat használtam, melyekből származó eredményeket véges méretű rendszerekre alkalmazott térelméleti módszerekkel számolt korrekciókkal magyarázom.

Eredmények: Dinamikus átlagtér-közelítés segítségével sikeresen bizonyítottam feltevésem helyességét nem egyensúlyi fázisátalakulásokra. A Monte-Carlo - szimulációkból származó eredmények igazolták az elméleti jóslatokat, mind egy tipikus (átlagos foksámú) pontra, mind egy jól összekötött pont esetén. Térelméleti megfontolások segítségével sikerült a véges rendszereken a kritikus szingularitásokat megmagyaráznom a kritikus dimenzió felett, valamint értelmezni a rendszer térfogatát a folyamatokat jellemző skálázási törvényekben.

Összefoglalás: Az egyensúlyi fázisátalakulásokra alkalmazott módszert sikerült általánosítani nem egyensúlyi fázisátmenetre, és értelmezni a véges méret korrekciókat.

Megjegyzés: A diplomamunka eredményeiről publikáció készült [32].

kulcsszavak: skálamentes hálózat, Barabási-Albert modell, irányított perkoláció, kontakt folyamat, átlagtér-közelítés, Monte-Carlo-szimuláció

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés és célkitűzés	3
2. Irodalmi áttekintés	6
2.1. Komplex hálózati modellek	6
2.1.1. Erdős-Rényi modell	6
2.1.2. Watts-Strogatz modell	8
2.2. Skálamentes hálózat - Barabási-Albert modell	10
2.2.1. Skálamentes hálózatok	10
2.2.2. Barabási-Albert modell	11
2.2.3. Analitikus tárgyalás	11
2.3. Nem egyensúlyi folyamatok	14
2.3.1. Univerzális skálázási törvények	16
2.4. Reakció-diffúzió folyamat	18
2.4.1. Mester egyenlet	19
2.4.2. Az átlagtér-közelítés	20
2.5. A irányított perkoláció és a kontakt folyamat	21
2.5.1. A kontakt folyamat	21
2.5.2. Az irányított perkoláció tulajdonságai	23
2.5.3. Fertőzésterjedés vizsgálata skálamentes hálózatokon	24
3. Kutatási kérdések, hipotézisek	30

3.1. Nem egyensúlyi fázisátalakulások és végesméret-skálázás vizsgálata élsúlyozott skálamentes hálózatokon	30
4. Kutatás módszerei	32
4.1. Dinamikus átlagtér-közelítés	32
4.2. A végesméret skálázás	35
4.3. A Monte-Carlo-szimulációk alkalmazása	38
4.3.1. Barabási-Albert hálózat szimulációja	38
4.3.2. Kontakt folyamat modellezése élsúlyozott Barabási-Albert hálózaton	40
5. Eredmények bemutatása, értelmezése	44
5.1. Kontakt folyamat vizsgálata élsúlyozott Barabási-Albert hálózaton . .	44
5.1.1. Barabási-Albert hálózat szimulációja	45
5.1.2. Kontakt folyamat szimulációja	46
5.1.3. Kritikus exponensek meghatározása	47
6. Összefoglalás	53

1. fejezet

Bevezetés és célkitűzés

Az elmúlt évtizedekben a technika hatalmas fejlődésen ment keresztül. Ennek hatására új típusú rendszerek alakultak ki, melyek szerkezetét, önmagukból adódóan, hatékonyan lehetett vizsgálni. Az ilyen kommunikációs hálózatokat, vagy magát az Internetet leíró információ halmazok könnyen hozzáférhetővé váltak, így azok struktúráját számítógépek segítségével lehetett analizálni. Az ott felfedezett tulajdonságok adták az alapját annak, hogy ezeket a jellemzőket teljesen független területekhez tartozó rendszerekben is megkeressék.

A fent említett hálózatokkal azonos viselkedést mutat a szociológiai hálózatok közül a Hollywoodban tevékenykedő színészek kollaborációs hálózata, a tudományos együttműködési és hivatkozási hálózatok, nyelvi hálózatok vagy egyes humán szexuális hálózatok is. A biológiai hálózatok közül a sejtek hálózata, vagy a fonalféreg *Caenorhabditis elegans* ideghálózata is hasonlóan írható le. Így az egyes tudományterületek közti határok átjárhatóvá váltak, és ma már közel 30 független hálózatról derült ki, hogy a fentiekhez hasonlóan struktúrárt mutatnak.

Természetesen sokakat foglalkoztatott a kérdés, hogy milyen eszközzel lehetne ezeket a hálózatokat modellezni és vizsgálni. Az első tárgyalás két magyar matematikustól származik. Erdős Pál és Rényi Alfréd 1959 és 1961 között publikált cikkeikben ([4]-[6]) írták le a véletlen gráfok elméletének alapjait, ezzel teljesen új fejezetet nyitva

a gráfelmélet tudományában.

Karinyth Frigyes 1929-ben megjelentetett *Lácszemek* című elbeszélésében írta le először azt a megfigyelést, miszerint minden ember a földön öt kapcsolatnyi távolságból ismeri egymást. Karinythtól függetlenül, valós ismeretségi hálózatokat vizsgálva, 1967-ben Stanley Milgram szociálpszichológus figyelte meg ugyan ezt a jelenséget, csak ő ezt a távolságot hatnak találta. Ennek az ún. "Kicsi a világ" jelenségnek elméleti leírására publikálták 1998-ban Duncan J. Watts és Steven H. Strogatz a saját modelljüket.

Egy másik meglepő tulajdonság, amit a fent említett struktúrákban fedeztek fel, miszerint a hálózat egyes pontjai sokkal több kapcsolattal rendelkeznek, mint társaik. Ez a tulajdonság a hálózat növelésével sem tűnik el, és megjelenik az ún. "a gazdag egyre gazdagabb lesz" effektus. A fent említett két jelenség modellezésére született a máig ismert legjobb, ilyen típusú reális hálózatokat legjobban megközelítő elméleti modell, a Barabási-Albert modell. Barabási Albert László és Albert Réka 1998-ban közölt cikkükben [10] írták le elképzeléseiket, amelyek később hatalmas érdeklődést váltottak ki a tudományterületen tevékenykedő kutatók körében.

Felvetődik a kérdés, hogy a fent említett valós hálózatokon lejátszódó folyamatokat miként vizsgálhatnánk a hálózati modellek segítségével. Ilyen reális folyamatok a számítógéphálózatokon, vagy emberi közösségekben terjedő vírusok (SkyNet, AIDS, ...), melyek fizikai megközelítésben nem egyensúlyi folyamatokként írhatóak le. Kis fertőzési sebesség mellett izolált beteg egyedek léteznek, míg egy kritikus fertőzési sebesség felett járvány alakul ki, illetve a számítógéphálózat összeomlik. Az ilyen nagy pontszámú rendszerekben tapasztalt nem egyensúlyi jelenségek általában jól tárgyalhatók sztohasztikus modellek segítségével. Ilyen esetben a rendszer különböző állapotai között fázisátalakulás történik, amihez tartozik egy fázisátalakulási pont. Ennek közelében a rendszer bizonyos tulajdonságai hatványfüggvényekkel írhatóak le. Az ezeket jellemző hatványfüggvény exponenseket meghatározva, pontosan megál-

lapíthatjuk a rendszer állapotát és viselkedését. A téma első átfogó matematikai tárgyalását, az 1960-as években, Leo Kadanoff adta, bár Ben Widom, A.Z. Patasinszkij és V.L. Pogróvszkij, vagy Michael Fischer vele párhuzamosan ugyan erre az eredményre jutottak miszerint, az addigra felfedezett számos a fázisátalakulásokra jellemző kritikus exponens csupán két exponensből kifejezhető. Ezt követően az 1970-es évek elején Kadanoff nyomán Kenneth Wilson ([17]-[18]) amerikai fizikus állította fel a renormálási csoportokról szóló elméletét, amely a téma egy teljes tárgyalása volt és amiért 1982-ben a fizikai Nobel-díjat is megkapta.

Diplomamunkám célja nem egyensúlyi fázisátalakulások vizsgálata élsúlyozott skálamentes hálózatokon. Elméleti bizonyítást keresünk a folyamatok leírására, és célunk ezek numerikus eredményekkel való igazolása. Továbbá magyarázatot keresünk a véges rendszerekben fellépő folyamatok méretfüggésének leírására is.

2. fejezet

Irodalmi áttekintés

2.1. Komplex hálózati modellek

Hálózatok reprezentálására a matematikai terminológiában általában gráfokat használunk. Egy gráfot olyan $G = [P, E]$ halmaz ír le, ahol $P_{1..N}$ a pontokat jelöli, E pedig a P ponthalmaz elemei között futó élek halmaza. A gráfelmélet alapjait a XVIII. században Leonhard Euler rakta le, de statisztikus alkalmazásai csak a XX. században terjedtek el, amikor is felvetődött a kérdés, hogy hogyan lehetne valós rendszereket, véletlen hálózatokkal modellezni és vizsgálni. A random gráfok első tárgyalása Erdős Páltól és Rényi Alfrédától származik, akik egy olyan hálózati modellt definiáltak, amelyben a különböző fokszámú pontok eloszlása véletlenszerű. Egy hálózat fokeloszlása alatt a hálózatban előforduló k fokú pontok számának eloszlását értjük.

2.1.1. Erdős-Rényi modell

Erdős és Rényi az általuk tárgyalt modellben egy N különböző pontból álló ponthalmazt értelmeztek, melynek pontjait n különböző éllel kötötték össze, amelyeket a lehetséges $\frac{N(N-1)}{2}$ darab élből válsztottak ki ([4]-[6], [2]). Végül $C_{\frac{N(N-1)}{2}}^n$ féle N pontú és n élű gráfot kaptak, melyek egy homogén valószínűségi teret alkotnak.

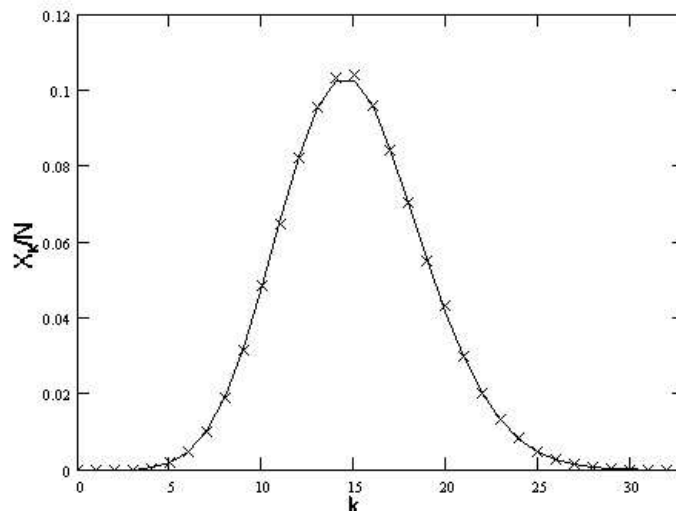
Egy másik lehetséges ekvivalens definíció az ún. binomiális modell. Itt szintén N ponttal indulunk, ahol minden pontpár p valószínűséggel kapcsolódik egymással. Ebben az esetben az élek számát valószínűségi változóként definiáljuk, melynek a várhatóértéke: $E(n) = p \frac{N(N-1)}{2}$. Így annak a valószínűsége, hogy kapjunk egy G_0 gráfot ami $P_1, P_2, \dots, P_N$ pontból és n élből áll, $P(G_0) = p^n (1-p)^{\frac{N(N-1)}{2} - n}$.

Ezt a modellt követtem egy általam készített előtanulmányban, ahol az Erdős-Rényi modell (ER modell) fokeloszlását vizsgáltam.

Véve egy véletlen gráfot p kapcsolódási valószínűséggel, a gráf i -ik pontjának k_i foka $N-1$ és p paraméterekkel binomiális eloszlást követ [2]:

$$P(k_i = k) = C_{N-1}^k p^k (1-p)^{N-1-k}. \quad (2.1)$$

Ez a valószínűség egy adott ponthoz húzott k él lehetséges kapcsolódási eseteinek számát adja meg, ahol p^k a kapcsolódó élek valószínűsége, $(1-p^{N-1-k})$ a nem kapcsolódó élek valószínűsége és mindezt C_{N-1}^k féle képpen tehetjük meg.



2.1. ábra. **A véletlengráf fokeloszlása.** Az általam generált gráf pontjainak száma $N = 10000$, a kapcsolódási valószínűség $p = 0.0015$. Az szimulációkból származó értékeket $\times$ -el jelöltem. Ezen kívül egy $\lambda_k = pN = 15$ parameterű numerikusan generált Poisson eloszlás van az ábrán, amit a folytonos vonal jelöl. Jól láthatóan kicsi az eltérés a két eloszlás között.

A fokeloszlás vizsgálatához először vezessük be a X_k valószínűségi változót, ami a k fokú pontok számát adja. X_k várhatóértéke (vagyis a k fokú pontok várhatóértéke) a (2.1) eloszlásból

$$E(X_k) = NP(k_i = k) = \lambda_k \quad (2.2)$$

ahol λ_k nem más mint

$$\lambda_k = NC_{N-1}^k p^k (1-p)^{N-1-k} \quad (2.3)$$

Ezek után a fokeloszlást vizsgálva, az közelít egy λ_k paraméterű Poisson-eloszláshoz.

$$P(X_K = r) = e^{-\lambda_k} \frac{\lambda_k^r}{r!} \quad (2.4)$$

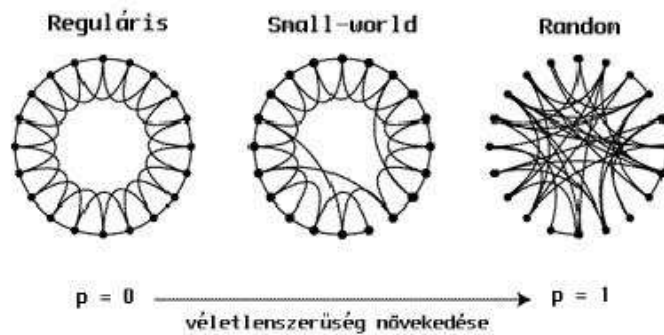
Mivel a Poisson-eloszlás nagy r értékekre gyorsan eltűnik (a fokeloszlástól való eltérése $\sigma_k = \sqrt{\lambda_k}$), kis egyszerűsítéssel azt mondhatjuk, hogy a fokeloszlás egzaktul binomiális, ami nagy N elemszám esetén Poisson-eloszlással helyettesíthető (2.1 ábra). A Poisson-eloszlás arra utal, hogy a hálózat jellemezhető egy átlagos fokszámmal, amitől az egyes pontok fokszáma csak kis mértékben tér el.

2.1.2. Watts-Strogatz modell

Egyes valós komplex hálózatokat pontosabban leíró modell az ún. ”kicsi a világ modell” (*small-world modell*). Korábban két módszert használtak hálózatok tárgyalására, melyek közül az egyik a fent említett véletlen gráf modell volt, a másik pedig különböző reguláris-rácsok alkalmazása. Watts és Strogatz találtak egy alkalmas kapcsolatot [7] mely az említett két struktúra között interpolál.

Az ő általuk felállított modell a következőképp épül fel:

1. Induljunk ki egy N pontú reguláris rácsból, ahol a pontok egy gyűrű mentén helyezkednek el, és minden pont k fokú, ahol k páros. Minden pont a gyűrűben hozzá legközelebb eső k ponthoz csatlakozik. Ezek mellett figyelembe vesszük, hogy $N \gg k \gg \ln(N) \gg 1$ legyen, ahol $k \gg \ln(N)$ azért felelős, hogy összefüggő gráfot kapjunk.
2. Ezek után minden élet p valószínűséggel újrarajzolunk úgy, hogy ha az esemény bekövetkezik, akkor az új végpontot véletlenszerűen választjuk ki, figyelembe véve, hogy nem lehet a gráfban hurok és dupla él. Az így kapott hálózaton belül $pNk/2$ olyan él lesz, amik a gyűrű-rács távolabbi pontjait kötik össze.



2.2. ábra. **A gyűrű-rács és a random gráf közti átalakulás szemléltetése.** Az átmenetet a fent leírt eljárás szerinti élek véletlenszerű újrarajzolásával a Watts-Strogatz modell alkotja. A vizsgált gráf $N=20$ pontból áll, és minden pont kezdetben a négy legközelebbi szomszédjával van összekötve. $p = 0$ esetén az eredeti gráfot, a p valószínűség növelésével, $p = 1$ -ben már egy véletlengráfot kapunk vissza. (Watts és Strogatz nyomán, lsd. Képjegyzék)

A p valószínűséget $p = 0$ -tól $p = 1$ -ig növelve a kezdeti gyűrű-rács folytonosan alakul át egy azonos pont- és élszámú véletlengráffá. A két határeset közötti átmenetet pedig a Watts-Strogatz hálózatok alkotják.

Ez a hálózati modell a "Kicsi a világ" effektus vizsgálatára használják, mivel véletlenszerűen kiválasztott két pont közötti legrövidebb út sokkal rövidebb, mint a véletlengráfok esetében.

2.2. Skálamentes hálózat - Barabási-Albert modell

2.2.1. Skálamentes hálózatok

Az 1990-es évek végén Barabási Albert László és munkatársai jöttek rá először arra, hogy az általuk vizsgált *www* hálózat (ahol a gráf pontjai az egyes honlapok, az éleket pedig a honlapok közt futó linkek reprezentálják) fokeloszlása a várt Poisson-eloszlás helyett (miután feltételezték, hogy a *www* egy véletlengráffal írható le) $P(k) \sim k^{-\gamma}$ hatványfüggvény szerinti eloszlást követett ([8]-[10]). Ez azt jelenti, hogy a világhálón van egy-két olyan honlap, amelyekhez a többi weboldal nagyrésze kapcsolódik és ezeken kívül szinte csak olyan oldal létezik, amelyekre kevesen hivatkoznak. Ezt a tulajdonságot később számos más valós hálózaton is megtalálták, mint pl. a korábban említett eseteknél, de az IBM által gyártott chip-ek huzalozása vagy az ökológiai táplálékláncok által felépített hálózat is hasonló tulajdonságot mutat. Ezek a nagy foksámú középpontok biztosítják, hogy a hálózat összefüggő maradjon és számuk a fokszámmal fordított arányban áll. Ezek alapján nagy fokszámbeli különbségek alakulnak ki egy hálózaton belül, így nincs egy viszonyítási pont, egy jellemző foksám a rendszerben, vagyis a fokeloszlása hatvány-függvény szerű és skálamentes.

A véletlengráfok esetén azzal a feltételezéssel éltünk, hogy a hálózatban nincs kitüntetett pont, mivel az élek elhelyezkedése teljesen véletlenszerű valamint, hogy a hálózat mérete nem változik, vagyis a hálózat pontjainak a száma a vizsgálatok során rögzített. Azonban reális hálózatokat tekintve, azok nagy részének mérete dinamikusán változik. Ugyanakkor egyes vizsgált hálózatok fokeloszlásának hatvány függvény alakja arra utal, hogy a hálózatok nem teljesen véletlenszerűek, hanem vannak benne olyan pontok, amelyek a hálózat fejlődése során több kapcsolatra tesznek szert, és mivel kapcsolódás szempontjából annál jobban kitüntetett egy pont, minél nagyobb a fokszáma így megjelenik a "a gazdag egyre gazdagabb lesz" effektus.

Ezen problémák kiküszöbölésére dolgozták ki Barabási Albert László és Albert Réka a saját modelljüket, ami sokkal jobban közelíti a valós hálózatokat és az eloszlása

szintén hatványfüggvény szerinti, a reálissal nagyjából azonos exponenssel. Munkám során nagyrészt ezzel a modellel dolgoztam.

2.2.2. Barabási-Albert modell

A Barabási-Albert modell segítségével a fenti két szempontot figyelembevéve skálamentes hálózatokat lehet szimulálni. A modell definíciója két lépésből áll:

1. Kezdetben a hálózat kis számú m_0 pontból áll. Minden időlépésben egy új pontot adunk a hálózathoz, amely m éllel ($m \leq m_0$) csatlakozik a már ott lévő pontokhoz.
2. Mikor új pontot veszünk a hálózathoz, azokat a pontokat, amelyekhez ez kapcsolódni fog, a már a hálózatban lévő pontok fokszámával arányos Π valószínűség alapján választjuk ki:

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j} \quad (2.5)$$

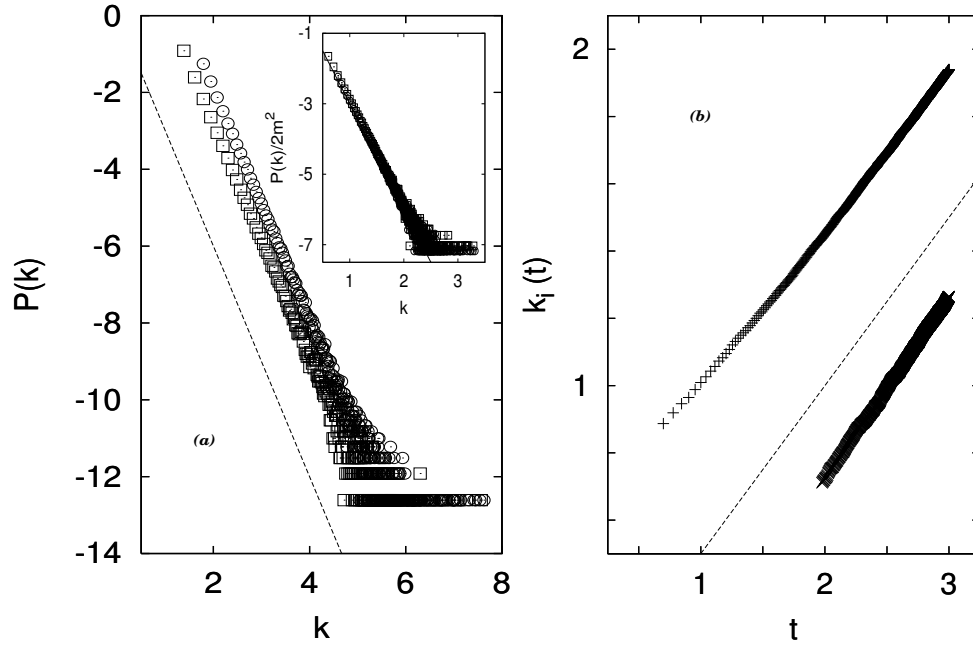
ahol k_i az i -edik pont fokszáma.

Az így definiált hálózatokban megjelenik az ún. "nagyon kicsi a világ" (*ultra-small world*) effektus, mivel két tetszőleges pont közti távolság sokkal kisebb lesz, mint a fent tárgyalt Erdős-Rényi vagy a Watts-Strogatz modellek esetén.

2.2.3. Analitikus tárgyalás

Az elméleti tárgyalást a [9] cikkben, Barabási, Albert és Jeong által közölt leírás alapján fogjuk végigvezetni. Ők a problémát kvázifolytonos közelítésben (*continuum theory*) tárgyalták, ami nagy fokszámok esetén teljesül.

Először számoljuk ki k_i időfüggését (ahol k_i az i -k pont fokszáma). Ez a következőképp írható fel:



2.3. ábra. **Barabási-Albert hálózat fokeloszlása és pontjai fokszámának időfejlődése.** Az (a) ábra $m_0 = m = 3(\square)$ és $m_0 = m = 5(\circ)$ kezdőfeltételekkel indított BA hálózatok fokeloszlását ábrázolja. A rendszer mérete mindkét esetben $N = m_0 + t = 300.000$. A szaggatott vonal egy $\gamma = 3.0$ meredekségű egyenest jelöl. A belső ábrán a $P(k)/2m^2$ van ábrázolva k függvényében. Jól látszik, hogy a különböző paraméterű hálózatok összeskálázódnak egy $\gamma = 3.0$ exponensű hatványfüggvényre. A (b) ábra a $t_1 = 5(+)$ időpontban és a $t = 95(\times)$ időpontban a hálózathoz vett pontok fokszámainak időfejlődését ábrázolja. A rendszer mérete $N = 1000$ és $m_0 = m = 5$. A vonal egy $a = 0.5$ meredekségű egyenest jelöl.

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = m\Pi(k_i) = m \frac{k_i}{\sum_{j=1}^{N-1} k_j} \quad (2.6)$$

ahol a 2.5. egyenletet használtuk. A nevezőben lévő összeg minden a rendszerben lévő pont fokszámát összegzi, kivéve az újonnan bekerült pontét, így ezt a következő alakban írhatjuk: $\sum_{j=1}^{N-1} k_j = 2mt - m$. Ezek után ezt a fenti egyenletbe visszaírva:

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = m\Pi(k_i) = m \frac{k_i}{2mt - m} \approx \frac{k_i}{2t} \quad (2.7)$$

Ezt a differenciálegyenletet megoldva (azzal a kezdőfeltétellel, hogy az i -ik pont a t_i -ik

pillanatban került a rendszerbe, m kapcsolódó éllel: $k_i(t_i) = m$) kapjuk, hogy:

$$k_i(t) = m \left(\frac{t}{t_i} \right)^\beta, \text{ ahol } \beta = \frac{1}{2} \quad (2.8)$$

Ebből következik, hogy minden pont fokszáma hatványfüggvényt követve fejlődik az idővel, egyenlő exponenssel. Ennek numerikus igazolása a (2.3.b) ábrán látható, és igazolja a korábban említett "gazdagok még gazdagabbak lesznek" feltevést, miszerint a hamarabb rendszerbe került jól kapcsolódott pontok foksámukat a később érkezett és kevésbé kapcsolódott pontok kárára növelik tovább.

Ezek után a fenti eredményt felhasználva számítjuk ki a rendszer fokeloszlását. $k_i(t)$ -re mint valószínűségi változóra tekintve, a 2.8. egyenlet segítségével a következőképp írhatjuk az eloszlásfüggvényét:

$$P(k_i(t) < k) = P\left(m \left(\frac{t}{t_i} \right)^\beta < k\right) = P\left(\frac{m^{1/\beta}t}{t_i} < k^{1/\beta}\right) = P\left(t_i > \frac{m^{1/\beta}t}{k^{1/\beta}}\right) \quad (2.9)$$

Ha feltesszük, hogy azonos időközönként adunk új pontot a hálózathoz, akkor t_i -nek konstans valószínűségi sűrűségfüggvénye lesz:

$$P(t_i) = \frac{1}{m_0 + t}. \quad (2.10)$$

Ezek után a 2.9. egyenletet a következő alakban írhatjuk:

$$P\left(t_i > \frac{m^{1/\beta}t}{k^{1/\beta}}\right) = 1 - P\left(t_i \leq \frac{m^{1/\beta}t}{k^{1/\beta}}\right) = 1 - \frac{m^{1/\beta}t}{k^{1/\beta}(m_0 + t)} \quad (2.11)$$

Végül 2.9. és a 2.11. egyenletek segítségével fel tudjuk írni a $P(k)$ fokeloszlást:

$$P(k) = \frac{\partial P(k_i(t) < k)}{\partial k} = \frac{\partial \left(1 - \frac{m^{1/\beta}t}{k^{1/\beta}(m_0 + t)}\right)}{\partial k} = \frac{2m^{1/\beta}t}{m_0 + t} \frac{1}{k^{1/\beta+1}} \quad (2.12)$$

Majd ($t \rightarrow \infty$) esetén a fokeloszlásra kapjuk, hogy:

$$P(k) \sim 2m^{1/\beta} k^{-\gamma}, \text{ ahol } \gamma = \frac{1}{\beta} + 1 = 3 \quad (2.13)$$

ahol tehát γ független m -től, t -től és a rendszermérettől. Ezt a (2.3.b) ábráról tudjuk megállapítani, melyen két pont fokszámának időfejlődése látható. Annak ellenére, hogy a rendszer folyamatosan növekszik, egy stacionárius skálamentes állapotba kerül. A (2.3.a) ábrán jól látszik, ha a fenti eredmények alapján a $P(k)/2m^2$ értékeket ábrázoljuk a fokszám függvényében, akkor az egy $\gamma = 3.0$ exponensű hatványfüggvényre fog esni.

2.3. Nem egyensúlyi folyamatok

A természetben előforduló jelenségeket mikroszkópikus közelítésben nem tárgyalhatjuk a klasszikus fizika módszereivel, mert véletlenszerűségüknél fogva nem tudjuk meghatározni t időpillanatban a vizsgált komplex rendszer s állapotát ([3], [12], [13], [16]). Statisztikus mechanikai közelítésben ezért definiálunk egy $P_t(s)$ valószínűséget, ami azt adja meg, hogy mekkora valószínűséggel tartózkodik a rendszer t időpontban a kérdéses s állapotban. Ezen állapot-valószínűség eloszlást vizsgáljuk amit sztochasztikus modellek segítségével írhatunk le.

Sztochasztikus folyamatok esetén a mikroszkópikus szabadsági fokok kollektív viselkedését keressük, ami általában folytonos fázisátmenetek során figyelhető meg. Az egyes fázisátmenetek alapján a folyamatokat univerzalitási osztályokba (*universality classes*) sorolhatjuk, melyeket azonos kritikus exponensek jellemeznek.

Ha a vizsgált rendszer termikus egyensúlyban van, akkor a $P_t(s)$ valószínűségi eloszlást a stacionárius Gibbs-sűrűség segítségével $P_{eq}(s) \sim e^{-\mathcal{H}(s)/k_B T}$ tudjuk tárgyalni, ahol $\mathcal{H}(s)$ a mikroszkópikus Hamilton-operátort jelöli. A természetben előforduló jelenségek kezdeti állapota azonban általában messze van a termikus egyensúlyi állapottól, és időfejlődésük függ a kiindulási paramétereiktől. Ezekben az esetekben

a Gibbs féle közelítés az eltérő dinamikai változók miatt nem alkalmazható, így itt $P_t(s)$ -t a Fokker-Planck egyenlettel, vagy az abból származtatható mester-egyenlet segítségével tárgyalhatjuk.

Az egyensúlyi fázisátalakulásokat szokás az átalakulás rendje alapján felosztani. Ha a rendszer termodinamikai potenciálja sorbafejthető, akkor Ehrenfest nyomán [14] értelmezhető annak rendűsége. Ebben az esetben ha a termodinamikai potenciáljának első deriváltja ugrást szenved, akkor elsőrendű fázisátmenetről beszélünk. Ha első rendben folytonos és a második derivált esetén következik be szingularitás, akkor másodrendű az átalakulás és hasonlóan tudunk definiálni magasabb rendű fázisátalakulásokat is.

A részecskék közti rövid hatótávolságú kölcsönhatások esetén a jelenségek leírására a reakció-diffúzió modell alkalmas ami segítségével fel lehet írni a folyamatot jellemző mester-egyenleteket. Azonban, ha ezek analitikusan nem megoldhatóak, közelítést kell alkalmaznunk. Ha nagy pontszámú a rendszer és a diffúzió domináns a reakcióval szemben, abban az esetben használhatjuk az átlagtér-közelítés módszerét, melynek lényege, hogy a kölcsönhatások során a folyamatot jellemző paraméterek ingadozásától eltekintünk, és azokat az átlagértékükkel helyettesítjük. Azonban alacsony dimenziók esetén, ha a diffúziós keveredés nem elég erős, ez nem alkalmazható, így ez a tárgyalás csak egy, a rendszerre jellemző ún. felső kritikus dimenzió felett érvényes.

Ha a rendszer a nem egyensúlyi fázisátalakulás során olyan stacionárius állapotba jut, amit nem képes elhagyni, azt abszorbeáló fázisnak nevezzük. Az ilyen átalakulások legfőbb univerzalitási osztálya a irányított perkoláció osztály. Ez az osztály jól alkalmazható rácson terjedő fertőzések vizsgálatára, ahol a rácson lévő beteg pont egy bizonyos valószínűséggel megfertőzheti a szomszédait (λ) és spontán meg is gyógyulhat (μ). A két valószínűség arányától ($\Delta = \mu/\lambda$) függően egy kritikus Δ_c alatt ($\Delta < \Delta_c$) a vírus kihal, vagy e-felett $\Delta > \Delta_c$ a rendszer egy stacionárius fertőzött (aktív) állapotba jut. A két állapot között folytonos nem egyensúlyi fázisátalakulás

figyelhető meg. Vizsgálódásaink során a irányított perkoláció univerzalitási osztályba tartozó kontakt folyamatot alkalmazzuk, amelyet a későbbiekben definiálunk. Ennek kritikus dimenziói és exponensei megegyeznek az irányított perkoláció kritikus dimenzióival és exponenseivel, és egy gyakran használt megvalósítása a fent leírt nem egyensúlyi fázisátalakulásnak.

2.3.1. Univerzális skálázási törvények

Az egyensúlyi statisztikus fizikához hasonlóan a nem egyensúlyi folyamatok singularitásai is hatékonyan tárgyalhatóak az ún. univerzális skálázási törvények segítségével. ([3], [12]) A fázisátalakulás során a kritikus pontban különböző mérhető mennyiségek asszimptotikusan hatványfüggvényekkel írhatók le, amelyekhez kritikus exponensek tartoznak.

Elsőként definiáljuk az általunk vizsgált fertőzésterjedési eljárások során mért rendparamétert. Ez nem más mint a rendszerben lévő aktív-pontok sűrűsége:

$$\rho(t) = \frac{1}{N} \left\langle \sum_i s_i(t) \right\rangle \quad (2.14)$$

Az aktív fázisban ez a sűrűség függ a $\delta = (\Delta - \Delta_c)/\Delta_c$ kontroll paramétertől azonban az inaktív fázisban, miután a rendszer abszorbeáló állapotba kerül, $\rho = 0$ lesz. Ha a két fázist elválasztó fázisátmeneti pontban vagyunk, a rendparaméter

$$\rho^\infty \sim |\delta|^\beta \quad (2.15)$$

szerint skálázódik, ahol a β rendparaméter exponens független a rendszer dimenziójától.

Egy másik jellemző kritikus mennyiség a ξ korrelációs hossz, amit szokás térben ($\xi_\perp$) és időben ($\xi_\parallel$) vizsgálni. Egyensúlyi fázisátalakulások esetén csak a rendszer lokális paraméterei változnak az idővel. Ekkor nem figyelhető meg makroszkópikus

időfüggő jelenségek, így fellép egy időtükrözési invariancia.

Ezzel szemben nem egyensúlyi esetben az időnek van egy kitüntetett iránya, így a térbeli $\xi_\perp$ és időbeli $\xi_\parallel$ korrelációs hosszak a következőként írhatók fel:

$$\xi_\perp \sim |\delta|^{-\nu_\perp}, \tau_r = \xi_\parallel \sim |\delta|^{-\nu_\parallel} \quad (2.16)$$

ahol az $\nu_\perp$ és $\nu_\parallel$ a térbeli és időbeli korrelációs hossz exponensek. $\xi_\parallel$ -t relaxációs időnek is szokás nevezni, amit τ_r -el jelölünk.

A skálázási tartományban a két korrelációs hossz között szintén egy $\xi_\parallel \sim \xi_\perp^z$ hatványfüggés figyelhető meg, ami az ún. $z = \nu_\parallel / \nu_\perp$ dinamikai exponenst definiálja.

Abszorbeáló fázisátmenetek esetén szokás definiálni a $P_s(t)$ túlélési valószínűséget, ami annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott pont, ami a kiválasztás időpillanatában fertőződött meg, t időlépésen keresztül aktív marad. Ez a valószínűség az aktív fázisban véges, és

$$P_s^\infty(t) \sim |\delta|^{\beta'} \quad (2.17)$$

alakban írható. Tehát az abszorbeáló állapotba való fázisátmenetet általánosan a négy: $\beta, \beta', \nu_\perp$ és $\nu_\parallel$ ún. tömbi kritikus exponensekkel tudjuk leírni, és az összes többi vizsgált exponens ezekből levezethető.

Időtükrözési szimmetria esetén β és β' megegyeznek. Ekkor bevezetve a $b = \delta^{-\nu_\perp}$ skálázási paramétert, a rendszer jellemző hosszára a $L' = L/b$ helyettesítéssel élve, valamint a $\delta^\nu b = b/\xi$ egyenlőséget figyelembevéve, felírhatjuk a fent definiált $\rho(t)$ rendparamétert és $P_s(t)$ túlélési valószínűséget leíró univerzális skálázási függvényeket:

$$\rho^\infty(\delta, 1/t) = b^{-x} \rho(\delta b^{1/\nu_\perp}, b^z/t, b/L) \quad (2.18)$$

$$P_s^\infty(\delta, 1/t) = b^{-x} P_s(\delta b^{1/\nu_\perp}, b^z/t, b/L) \quad (2.19)$$

Eddigi vizsgálódásaink során feltettük, hogy a rendszer L mérete végtelen. Mivel a numerikus realizációk során ez nem teljesül, ezért figyelembe kell vennünk egy véges-rendszer megkötést ami a skála-függvényeket befolyásolja. A rendszerben lévő pontok számát $N = L^d$ -ként definiálva, valamint bevezetve a $x = \frac{\beta}{\nu_\perp}$ a véges méret exponenst a (2.18-2.19) egyenletek a következő képpen módosulnak:

$$\rho(\delta, 1/t, 1/N) = b^{-x} \rho(\delta b^{1/\nu_\perp}, b^z/t, d/N) \quad (2.20)$$

$$P_s(\delta, 1/t, 1/N) = b^{-x} P_s(\delta b^{1/\nu_\perp}, b^z/t, d/N) \quad (2.21)$$

2.4. Reakció-diffúzió folyamat

Egyes kémiai és biokémiai folyamatokat olyan nyílt rendszerrel lehet modellezni, amibe folyamatosan reakcióra képes részecskék lépnek be és tűnnek el, így létrehozva egy stacionárius nem egyensúlyi állapotot. Ezen folyamatokat olyan dinamikai szabályokkal lehet leírni, ahol az állapotok közti átmenetek vannak definiálva. Az ilyen folyamatokat tárgyaló sztochasztikus modellek matematikai leírására szolgálnak a reakció-diffúzió egyenletek ([12]-[13]), amit más nem egyensúlyi rendszerek leírására is alkalmaznak.

A következőkben definiáljunk egy olyan egyszerű reakció-diffúzió modellt, amelyben egy fajta pont szerepel, és két állapotban lehet. Jelöljük (A) -val ha a pont aktív, valamint $(\oslash)$ ha a pont inaktív állapotban van. A rendszerre jellemző állapotok közti átmenetek a következő rátákkal következnek be:

	Átmenet	Ráta	Név
1.	$A\oslash \leftrightarrow \oslash A$	D	diffúzió
2.	$AA \rightarrow A\oslash, \oslash A$	λ	koaguláció
3.	$A\oslash, \oslash A \rightarrow AA$	κ	dekoaguláció

2.4.1 táblázat: **Reakció-diffúzió modell definíciója.**

2.4.1. Mester egyenlet

Makroszkópikus közelítésben a különböző állapotok valószínűségi eloszlásának időfejlődése a mester-egyenlettel írható le:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t(s) = \sum_{s'} w_{s' \rightarrow s} P_t(s') - \sum_{s'} w_{s \rightarrow s'} P_t(s) \quad (2.22)$$

ahol $P_t(s)$ annak a valószínűsége, hogy a rendszer t pillanatban s állapotban tartózkodik. $\sum_s P_t(s) = 1$ normalizálható valamint az átmeneti valószínűségek időfüggetlenek és indexekben szimmetrikusak ($w_{s' \rightarrow s} = w_{s \rightarrow s'}$). A fenti sztochasztikus folyamat esetén a mester-egyenlet akkor teljesül, ha a folyamat irreverzibilis és stacionárius Markov-típusú. Következő lépésként a mester-egyenletet vektorjelöléssel felírva kapjuk a

$$\partial_t |P_t\rangle = -\mathcal{L} |P_t\rangle \quad (2.23)$$

egyenletet ahol $|P_t\rangle$ a $P_t(s)$ komponensekből álló vektor, $\mathcal{L}$ pedig a Liouville-operátor, melyet a következőképp definiáljuk:

$$\sum_{s'} \langle s' | \mathcal{L} | s \rangle = -w_{s \rightarrow s'} + \delta_{s,s'} \sum_{s''} w_{s \rightarrow s''} \quad (2.24)$$

Ezek után írjuk fel az előbb vizsgált rendszer különböző állapotaihoz tartozó mester-egyenletet:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t(A\oslash) = DP(\oslash A) + \lambda P(AA) - \kappa P(A\oslash) - DP(A\oslash)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t(\oslash A) = DP(A\oslash) + \lambda P(AA) - \kappa P(\oslash A) - DP(\oslash A)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t(AA) = \kappa P(A\oslash) + \kappa P(\oslash A) - 2\lambda P(AA)$$

Majd a (2.22-2.27) képletek segítségével kapjuk a Liouville-operátor mátrixát:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa + D & -D & -\lambda \\ 0 & -D & \kappa + D & -\lambda \\ 0 & -\kappa & -\kappa & 2\lambda \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

2.4.2. Az átlagtér-közelítés

Sok esetben, makroszkópikus közelítésben a reakció-diffúzió folyamatot egyszerűbben tudjuk tárgyalni az átlagtér-közelítés módszerével. Nagy rendszer esetén a reakció-diffúzió folyamat során fellépő $\rho(t)$ részecskesűrűség változását leíró átlagtér-egyenletet közvetlen fel tudjuk írni a reakció modell alapján. A fenti példát tekintve azon állapotátmeneteket figyeljük ahol a részecskék száma megváltozik, így a 2.4.1. táblázat alapján a második sorban leírt átmenet $\lambda\rho^2(t)$ tagként, valamint a harmadik sorban leírt átmenet $\kappa\rho(t)$ tagként fog megjelenni az egyenletben. Ezek után a reakció-diffúzió folyamatot leíró átlagtér-egyenlet a következő alakban adódik:

$$\partial_t \rho(t) = \kappa \rho(t) - \lambda \rho^2(t) \quad (2.26)$$

A mester-egyenlettel szemben itt a rendszert egy nemlináris differenciálegyenlet írja le. Ehhez két stacionárius állapot tartozik $\kappa < 0$ esetén, amiből az egyik $\rho = 0$ abszorbeáló állapot, a másik pedig $\rho = \kappa/\lambda$ esetén áll fenn feltéve, hogy $(\lambda > 0)$. A rendszer inhomogenitását egy perturbációs taggal vesszük figyelembe, ami a sűrűség térbeli ingadozását jelzi. Így D -vel a diffúziós állandót jelölve a reakció-diffúzió egyenlet a következő alakban áll fel:

$$\partial_t \rho(\mathbf{x}, t) = \kappa \rho(\mathbf{x}, t) - \lambda \rho^2(\mathbf{x}, t) + D \nabla^2 \rho(\mathbf{x}, t) \quad (2.27)$$

2.5. A irányított perkoláció és a kontakt folyamat

2.5.1. A kontakt folyamat

A környezetünkben előforduló számos fertőzés-terjedési folyamat, úgymint járványok terjedése biológiai, és mesterséges hálózatokon vagy adatsomagok vándorlása kommunikációs hálózatokon legegyszerűbben az irányított perkolációval tárgyalhatók.

Ilyen folyamatok esetén két alapvető jelenség, a fertőzés és a gyógyulás van jelen. Ezen két esemény befolyásolja a rendszer végállapotát. Ha a fertőzés dominál, akkor a járvány kiterjed az egész populációra és egy stacionárius állapotba jut. Ellenkező esetben, ha a gyógyulás erősebb, akkor a járvány kihal, és a populáció meggyógyul. A két állapot között nem egyensúlyi folytonos fázisátalakulás van.

Elméleti megközelítésben a két jelenség bekövetkezéséhez valószínűségeket rendelhetünk. Legyen annak a valószínűsége, hogy egy beteg pont megfertőzi a szomszédját λ , és annak, hogy spontán meggyógyul μ . A két eseményhez rendelt valószínűségek $\Delta = \mu/\lambda$ hányadosa határozza meg, hogy a rendszer aktív vagy inaktív fázisba jut-e. A két folyamat egymással párhuzamosan van jelen a rendszerben.

Példaként tekintsünk egy 1+1 dimenziós rácsot és iteráljunk rajta egy fertőzési folyamatot minden t időpillanatban. Jelöljük s_i -vel az i -ek pont állapotát ami két értéket vehet fel, attól függően, hogy a pont fertőzött ($s_i = 1$), vagy nem ($s_i = 0$).

Ha definálunk egy $0 < r < 1$ véletlen számot, akkor a t -ik a $t + 1$ -ik időpontra való lépéskor egy pont állapota a következőképpen alakulhat:

$$s_i = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } s_i(t) = 0, s_{i-1}(t) = 1, \text{ valamint } r < \lambda \\ 1 & , \text{ ha } s_i(t) = 0, s_{i+1}(t) = 1, \text{ valamint } r < \lambda \\ 0 & , \text{ ha } s_i(t) = 1, \text{ valamint } r < \mu \\ 0 & , \text{ egyébként} \end{cases}$$

Numerikus szimulációk során a fertőzést kétféleképpen szokás vizsgálni, miszerint az első $t = 0$ időpontban csak egy, vagy az összes pont fertőzött. A két mód a folyamat szempontjából ekvivalens. A $\Delta < \Delta_c$ szubkritikus fázisban az aktív pontok száma exponenciálisan lecseng, ezzel szemben a $\Delta > \Delta_c$ szuperkritikus részben $N \rightarrow \infty$ esetén egy véges klasztert alakul ki, melynek mérete függ a kritikus ponttól való távolságtól. A $\Delta = \Delta_c$ kritikus pontban lassan terjed szét a vírus és az aktív pontok egy fraktál-struktúrát alakítanak ki.

Kontakt folyamatok esetén átlagtér-közelítést véve a kritikus ponthoz közel ($\delta \ll 1$) a rendparaméter $\rho(t) \sim \delta$ lineárisan skálázódik, tehát a átlagtér rendparaméter exponens $\beta^{MF} = 1$ -nek adódik. Mindemellett a kritikus pont alatt

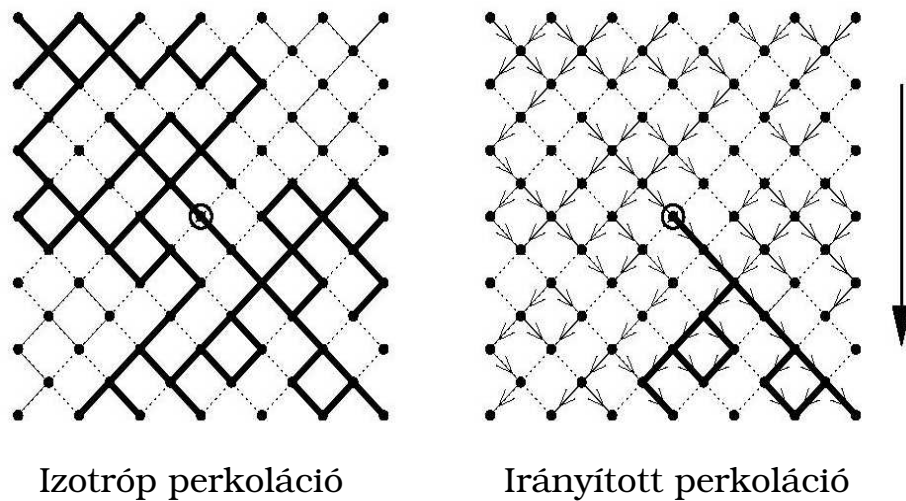
$$\rho(t) \sim e^{-\delta t} \sim e^{-t/\xi_{\parallel}} \quad (2.28)$$

szerint viselkedik, következésképpen $\xi_{\parallel} \sim \delta^{-1}$, így a időbeli korralációs exponens átlagtér-közelítésben $\nu_{\parallel}^{MF} = 1$. A térbeli korreláció meghatározására tekintsük a 2.27. átlagtér-egyenletet. A $\rho(\mathbf{x}, t)$ -t a 2.3.1. fejezetben tárgyaltak alapján abban az esetben lesz invariáns a skálázásra, ha $\nu_{\perp}^{MF} = \frac{1}{2}$.

A fenti közelítés végtelen dimenzió esetén egzakt. Véges dimenziós kontakt folyamat esetén $d \geq 4$ felett korrektek az exponensek értékei, tehát a rendszerhez tartozó kritikus dimenzió $d_c = 4$, ami felett már igaz az átlagtér-közelítés.

2.5.2. Az irányított perkoláció tulajdonságai

Miután a vizsgált eljárás egy nem egyensúlyi folyamat, ezért dinamikusan függ az időtől. Ez legegyszerűbben geometriai modellel szemléltethető. Tekintsünk egy hiperkübös rácsot ahol a fertőzés a rácspotok közötti éleken terjedhet tovább. Irányítatlan esetben bármely élen, irányított rács esetén csak a megengedett irányba. Szemléletesen értelmeziünk egy p valószínűséget, ami azt adja meg, hogy mekkora valószínűséggel van egy él nyitva, amikor engedi a fertőzést továbbterjedni. A p -től függően a fertőzés perkolál a rácson, vagy egy véges klasztert alakít ki, a hálózat nagy részét tisztán hagyva. A kialakult klaszter mérete az összefüggő pontok száma. A rendszer rendparamétereként a P_∞ valószínűséget definiáljuk, ami annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott pontból kiindulva egy végtelen klaszter alakul ki. Ezen kívül rendparaméterként definálhatjuk a $\rho(t)$ aktív pont sűrűséget is.



2.4. ábra. **Izotróp és Irányított perkoláció.** A nyitott éleket folytonos, a zártakat szaggatott vonal jelöli. A vastag vonal a középpontból kiterjedt fertőzés által kialakított klasztert szemlélteti (Hinrichsen nyomán, lsd. Képjegyzék).

A folyamat lefolyása két esetben triviális. Ha a rács $d = 1$ dimenziós (lánc), csak akkor van kritikus fázis, ha $p = 1$, valamint ha a rendszer $d = \infty$ végtelen dimenziós, akkor az inaktív fázisba csak $p = 0$ esetén juthat.

Véges dimenziók esetén ($1 < d < \infty$) a fázisátmenet egy $0 < p_c < 1$ kritikus ponttal jellemzhető. Ha a fertőzés $p > p_c$ szuperkritikus fázisban van, akkor szétterjed a rendszerben, és ha a $p < p_c$ szubkritikus fázisban tartózkodik akkor eltűnik.

2.5.3. Fertőzésterjedés vizsgálata skálamentes hálózatokon

Valós rendszereket modellező komplex hálózatokat a korábbiakban tárgyaltak alapján két fő csoportra oszthatjuk ([11], [20], [21], [22], [23]). Az első és jobban ismert csoport az ún. *exponenciális hálózatok*. Ide tartoznak a véletlen hálózatok és a Watts-Strogatz féle "kicsi a világ" hálózatok. Az ilyen fokeloszlásukban homogén rendszereken való fertőzésterjedési vizsgálatok során a klasszikus átlagtér-közelítést alkalmazhatjuk, mivel hosszútávú kölcsönhatások jelennek meg a rendszerben, és ebben az esetben nem végtelen méret esetén is érvényes ez a közelítés.

A komplex hálózatok másik fő csoportja a *skálamentes hálózatok* melyek fokeloszlása az előző modellekkel szemben inhomogén. Ebből kifolyólag a járványterjedési folyamatok eltérően viselkednek a fentiekhez képest.

A skálamentes hálózatok fokeloszlása a 2.2.1 részben tárgyaltak alapján $P(k) \sim k^{-\gamma}$. Meglepő módon a fertőzés terjedést γ alapján tudjuk osztályozni, miután ettől függetlenül különbözőképp tárgyalhatjuk az egyes fertőzési eseteket.

$0 < \gamma \leq \gamma_c$: Ebben az esetben $\langle k \rangle$ átlagos fokszám és az átlagos kölcsönhatási intenzitás divergens, így a fertőzés minden esetben kiterjed.

$\gamma_c < \gamma \leq \gamma_u$: Ez a tartomány az ún. nemkonvencionális átlagtér-tartomány, ahol a kritikus exponensek γ függők.

$\gamma = \gamma_u$: Ebben a pontban az átlagtér-közelítés logaritmikus korrekcióval érvényes.

$\gamma_u < \gamma$: Klasszikus átlagtér-tartomány, ahol az exponensek ugyan azok, mint reguláris rácsok esetén.

Analitikai tárgyalás

Definiáljuk $\rho_k(t) = \frac{N_a^k(t)}{N}$ -t mint a k fokú fertőzött pontok relatív sűrűségét, ahol $N_a^k(t)$ a k fokú aktív pontok száma [19]. Ez a sűrűség nem más mint annak a valószínűsége, hogy egy k fokú pont fertőzött. Vizsgálataink során rögzítsük μ gyógyulási rátát $\mu = 1$ -re. Valószínűségi ráta alatt időegység-függő valószínűséget értünk. Ezek után felírhatjuk a Dinamikus átlagtér-egyenletet:

$$\partial_t \rho_k(t) = -\mu \rho_k(t) + \lambda k [1 - \rho_k(t)] \Theta[\{\rho_k(t)\}] \quad (2.29)$$

ahol a magasabb rendű tagok $\rho_k(t) \ll 1$ miatt elhanyagolhatók. Az egyenlet jobb oldalának első tagja a gyógyulásért felelős, a második tag az újonnan keletkezett aktív pontokat jelöli. A pontkeltő tagban $(1 - \rho_k(t))$ annak a valószínűsége, hogy a k fokú pont egészséges, λ rátával fertőződik meg, a hozzá kapcsolódó k élen keresztül. Végül $\Theta(\{\rho_k(t)\})$ annak a valószínűsége, hogy a kérdéses ponthoz kapcsolódó pontok betegek.

Az aktív fázisban ρ_k véges állandósult állapota függ λ -tól, amiből következik, hogy

Θ is λ -függő. Stacionárius állapot esetén $\partial_t \rho_k(t) = 0$, így ρ_k -ra

$$\rho_k = \frac{k\lambda\Theta(\lambda)}{1 + k\lambda\Theta(\lambda)} \quad (2.30)$$

adódik, ami azt mutatja, hogy minél nagyobb egy pont fokszáma, annál biztosabb, hogy aktív állapotban van. Θ kifejezésére vezessük be $sP(s)/\langle k \rangle$ valószínűségét annak, hogy két pont egymáshoz s éllel kapcsolódik. Ekkor az átlagos valószínűsége, hogy egy pont egy fertőzött ponthoz kapcsolódjon:

$$\Theta(\lambda) = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kP(k)\rho_k \quad (2.31)$$

ami a 2.30 egyenlettel egy önkonzisztens összefüggést alkot. Ekkor a rendszer ρ rend-paramétere felírható a következő alakban.

$$\rho = \sum_k P(k)\rho_k \quad (2.32)$$

A fenti önkonzisztens összefüggést átírhatjuk a következő alakra:

$$\Theta = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kP(k) \frac{k\lambda\Theta(\lambda)}{1 + k\lambda\Theta(\lambda)} \quad (2.33)$$

amiben csak Θ függ λ -tól.

Ennek az egyenletnek $\Theta = 0$ mindig megoldása lesz, azonban ha nem zéró esetre ($\rho \neq 0$) a fenti egyenletet mint Θ függvényét tekintjük, ahol $0 < \Theta \leq 1$, akkor:

$$\left. \frac{d}{d\Theta} \left(\frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kP(k) \frac{\lambda k \Theta}{1 + \lambda k \Theta} \right) \right|_{\Theta=0} \geq 1 \quad (2.34)$$

összefüggés teljesül. Ekkor a λ -t tartalmazó tag segítségével definiálhatjuk a kritikus küszöbértéket:

$$\frac{\sum_k kP(k)\lambda_c k}{\langle k \rangle} = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} \lambda_c = 1 \quad (2.35)$$

amiből $\lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle}$ adódik és ebből következik, hogy $2 < \gamma \leq 3$ tartományban $N \rightarrow \infty$ esetén $\langle k^2 \rangle \rightarrow \infty$ szintén teljesül, így a $\lambda_c = 0$ -nak adódik.

Alkalmazás Barabási-Albert hálózaton

Barabási-Albert hálózaton a fenti analitikus tárgyalást a fokszámoszlás kvázifolytonos közelítésével alkalmazzuk. A 2.31. definícióban szereplő $P(k)$ fokeloszlásra a $P(k) = 2m^2 k^{-3}$, valamint a $\langle k \rangle = \int_m^\infty k P(k) dk = 2m$ helyettesítést véve, a $\Theta(\lambda)$ a következőként írható:

$$\Theta(\lambda) = m\lambda\Theta(\lambda) \int_m^\infty \frac{1}{k} \frac{dk}{1 + k\lambda\Theta(\lambda)} = m\lambda\Theta(\lambda) \log \left(1 + \frac{1}{m\lambda\Theta(\lambda)} \right) \quad (2.36)$$

amit egyszerűsítve kapjuk:

$$\Theta(\lambda) = \frac{e^{-1/m\lambda}}{\lambda m} (1 - e^{-1/m\lambda})^{-1} \quad (2.37)$$

A fertőzött pontok sűrűségének viselkedését vizsgálva a 2.32 alapján a rendparamétert felírhatjuk:

$$\rho = 2m^2\lambda\Theta(\lambda) \int_m^\infty \frac{1}{k^2} \frac{dk}{1 + k\lambda\Theta(\lambda)} = 2m^2\lambda\Theta(\lambda) \left[\frac{1}{m} + \lambda\Theta(\lambda) \log \left(1 + \frac{1}{m\lambda\Theta(\lambda)} \right) \right] \quad (2.38)$$

alakban. Ebbe visszaírva a $\Theta(\lambda)$ kifejezést, a legalacsonyabb λ rendre:

$$\rho \sim 2e^{-1/m\lambda} \quad (2.39)$$

Ez azt mutatja, hogy a kritikus küszöb ebben a modellben is $\lambda_c = 0$ -nak adódik feltéve, hogy $\langle k^2 \rangle = \infty$. Mivel reális hálózatok γ fok exponense $2 < \gamma < 3$ tartományba esik és $\gamma_c = 3$, ezért mindig ez az eset következik be.

Végesméret effektusok

Tapasztalataink alapján véges hálózatokon a fertőzés függetlenül a fertőzési rátától egy idő után minden esetben kihal. Ennek oka, hogy létezik egy olyan véges valószínűség (a véges méretből fakadóan), hogy minden fertőzött pont ugyan abban a pillanatban meggyógyuljon és ne fertőzzön tovább.

Ez a valószínűség $N \rightarrow \infty$ esetén csökken. Azonban miután az általunk végzett vizsgálódások során az időablak túl kicsi ahhoz, hogy ez az effektus szerepet játszon, ezért számottevően nem befolyásolja az eredményeinket. Nagy pontszámú rendszerek esetén ez a jelenség λ -tól is függ, éppen ez az oka annak, hogy P_s véges abszorbeáló rendszerek esetén egyensúlyban van kritikus pontban, és növekszik a rendszermérettel az aktív fázisban minden λ esetén.

A valós hálózatok és az általunk szimulált realizációk véges méretük folytán messze vannak a termodinamikai határesetről. Végességükből adódóan nem szerepelnek bennük végtelen fokszámú pontok, így a vizsgált fertőzések a rendszerben megjelenő legnagyobb k_c fokszámtól, így a rendszermérettől is függenek. Skálamentes hálózatok esetén a fokeloszlás a véges méret miatt $P(k) \sim k^{-\gamma} f(k/k_c)$ szerint átskálázódik, ahol $f(k/k_c)$ gyorsan eltűnik $k/k_c > 1$ esetén. Ezzel a k_c fokszámmal jellemezhetőek a különböző méretű realizációk.

Szintén a véges méretből adódik, hogy $\langle k^2 \rangle$ végessé válik, és ezért $\lambda_c \neq 0$ lesz, mint általában a nem egyensúlyi folyamatok esetén, azonban λ_c csökken, ha növeljük N -t (vele együtt k_c -t is), vagyis a fertőzés könnyebben terjed szét a hálózatban. Ha ebben az esetben a fenti fokeloszlásban szereplő $f(x)$ függvényt egy exponenciálissal helyettesítjük, akkor:

$$P(k) \sim k^{-\gamma} e^{(-k/k_c)} \quad (2.40)$$

alakban adódik, valamint a nemzéró küszöbérték:

$$\lambda_c(k_c) \simeq (k_c/m)^{\gamma-3} \quad (2.41)$$

ahol m a Barabási-Albert hálózat eredeti definíciójában szereplő legkisebb foksámot jelöli. A korlát $\gamma \rightarrow 3$ esetén jelenik meg, ellenkező esetben egy logaritmikus közelítéssel tudjuk helyettesíteni:

$$\lambda_c(k_c) \simeq m \ln(k_c/m)^{-1} \quad (2.42)$$

Így levonhatjuk azt a következtetést, miszerint λ_c minden esetben csökken, ha nő a rendszer k_c karakterisztikus levágása.

3. fejezet

Kutatási kérdések, hipotézisek

3.1. Nem egyensúlyi fázisátalakulások és végesméret-skálázás vizsgálata élsúlyozott skálamentes hálózatokon

Kutatásaim során olyan skálamentes-hálózatokkal foglalkoztam, melyeket a Barabási-Albert modellt követve szimuláltam, a 2.2.2. részben tárgyalt definíció alapján. Az így modellezett struktúrákban a kölcsönhatási folyamatok során fellépő kooperatív jelenségek jellemzőire voltam kíváncsi.

Az eddigi vizsgálatok során mind egyensúlyi (Ising modell, Potts modell [11], [24]-[26]), mind nem egyensúlyi (perkoláció, fertőzés terjedés [19]-[21], [27]) fázisátalakulásokat általánosan, nemsúlyozott hálózatokon vizsgálták, ahol az egyes pontok közti kölcsönhatások erőssége mindig azonos volt. Ezekben az esetekben az átlagtérközelítés csak akkor alkalmazható, ha a γ fokszám exponensre igaz a 2.5.3. részben tárgyalt feltétel, vagyis $\gamma > \gamma_u$. Egyensúlyi esetben ez a kritikus felső küszöbérték $\gamma_u = 5$, valamint nem egyensúlyi fázisátmenetekenél $\gamma_u = 4$.

Érdekesebb kérdést vet fel, ha feltesszük, hogy a hálózaton vizsgált kölcsönhatás inhomogén. Ezt annak alapján tételezhetjük fel, hogy a korábban a hálózatba

került pontok (melyeknek nagyobb a foksámuk) nagyobb eséllyel immunizálódtak a fertőzéssel szemben, mint a később érkezettek. Korábban Giuraniuc vizsgált inhomogén kölcsönhatásokat skálamentes hálózatokon, de csak egyensúlyi fázisátmenet (Ising-modell) esetében [1].

A kölcsönhatás inhomogenitását élsúlyozott hálózatokon úgy vizsgálták, hogy minden él végpontjainak foksámától függően az egyes élekhez súlyokat rendeltek, és a kölcsönhatás ezen értékektől függően vesztette el homogenitását. Az egyes éleket a következőképpen skálázták újra:

$$\lambda_{i,j} = \lambda \frac{(k_i k_j)^{-\mu}}{\langle k^{-\mu} \rangle^2} \quad (3.1)$$

ahol $\lambda_{i,j}$ az i és j pontok közti kölcsönhatás valószínűségi rátája, valamint μ a súlyozási exponens. Ebben az esetben a kritikus viselkedés egyensúlyi fázisátalakulás esetén a következő effektív foksám exponenstól függ:

$$\gamma' = \frac{\gamma - \mu}{1 - \mu} \quad (3.2)$$

Az így súlyozott skálamentes hálózatokon $\gamma < 3$ esetén is megfigyelhető a kritikus fázisátalakulás feltéve, hogy a μ súlyozási exponens elég nagy.

Diplomamunkám során nem egyensúlyi fázisátmeneteket vizsgálunk élsúlyozott Barabási-Albert hálózatban. Célunk a 3.2. egyenletben egyensúlyi esetre definiált módosított γ' paraméterszabály nem egyensúlyi fázisátalakulásokra való bizonyítása. Ennek elméleti tárgyalására dinamikus átlagtér-közelítést használunk. Az elméleti eredményeket hosszúidejű Monte-Carlo-szimulációkból származó numerikus eredményekkel vetjük össze, és az esetlegesen megjelenő véges méret effektusokat az általában hiper köbös rácsoknál használt térelméleti megfontolásokkal magyarázzuk.

4. fejezet

Kutatás módszerei

4.1. Dinamikus átlagtér-közelítés

A nem egyensúlyi fázisátalakulásokat a irányított perkoláció univerzalitási osztályba tartozó kontakt folyamat segítségével vizsgáljuk, amit a 2.5. szakaszban tárgyaltunk. Definiáljuk a a betegedést úgy, hogy az i -ik egészséges pont λ_{ij} rátával fertőződik meg feltéve, hogy j szomszédja aktív volt, valamint a μ gyógyulási rátát válasszuk $\mu = 1$ -nek.

Induljunk ki az i -ik pont ($i = 1..N$) átlagos fertőzési sűrűségének időderiváltjából:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = \sum_j \lambda_{i,j} (1 - \rho_i) \rho_j - \rho_i \quad (4.1)$$

Ebben az egyenletben a jobb oldal első tagjában szereplő $(1 - \rho_i)$ akkor igaz, ha az i -ik pont egészséges és a ρ_j beteg szomszédjától λ_{ij} rátával fertőződhet meg. Az összegzés az i -ik pont minden j szomszédjára történik. A második tag a spontán meggyógyulást jelenti, feltéve hogy i beteg volt. Következő lépésben írjuk fel kölcsönhatási rátát:

$$\lambda_{ij} = \lambda \frac{k_i k_j}{\sum_j k_j} \frac{(k_i k_j)^{-\mu}}{< k^{-\mu} >^2} \quad (4.2)$$

ahol λ a klasszikus kontakt folyamat során tárgyalt homogén fertőzési ráta. Ezt követően vezessük be a rendszer átlagos sűrűségét:

$$\rho = \frac{\sum_j k_j^{1-\mu} \rho_j}{\sum_j k_j^{1-\mu}} \quad (4.3)$$

A fenti megfontolásokat figyelembevéve a dinamikus átlagtér-egyenlet a következőképp alakul:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = \tilde{\lambda} k_i^{1-\mu} (1 - \rho_i) \rho - \rho_i \quad (4.4)$$

ahol $\tilde{\lambda} = \lambda \langle k^{1-\mu} \rangle / \langle k \rangle \langle k^{-\mu} \rangle^2$. A fenti dinamikai egyenlet a stacionárius állapotban $\partial_t \rho_i = 0$, így megkaphatjuk a lokális sűrűséget, ami arányos $k_i^{1-\mu}$ -vel:

$$\rho_i = \frac{\tilde{\lambda} k_i^{1-\mu} \rho}{1 + \tilde{\lambda} k_i^{1-\mu} \rho} \quad (4.5)$$

Ezt követően 4.5. egyenletet visszaírva a 4.3. egyenletbe, valamint az i -re való összegzést a teljes $P_D(k)$ fokeloszláson való integrálással helyettesítve kapjuk:

$$\langle k^{1-\mu} \rangle = \tilde{\lambda} \int_{k_{min}}^{k_{max}} P_D(k) \frac{k^{2(1-\mu)}}{1 + \tilde{\lambda} k^{1-\mu} \rho} dk \quad (4.6)$$

A fenti integrál felső korlátja termodinamikai határesetben $k_{max} \rightarrow \infty$. A 4.6. egyenlet megoldása közel a kritikus ponthoz ($\rho \ll 1$) függ a vizsgált hálózat fokeloszlásának nagyfokú levágásától. Ezt figyelembe véve és az integrálási változót $k' = k^{1-\mu}$ -vel helyettesítve

$$\langle k' \rangle = \tilde{\lambda} A \int_{k'_{min}}^{k'_{max}} k'^{-\gamma'} \frac{k'^2}{1 + \tilde{\lambda} k' \rho} dk' \equiv Q(\rho, \gamma') \quad (4.7)$$

egyenletet kapjuk, ahol γ' -t a 3.2 egyenletben definiáltuk. Az integrál $k_{max} \rightarrow \infty$ esetén sem válik divergenssé, mert az integrandusban szereplő ρ egy véges levágást eredményez. Következésképpen a fenti egyenletből látszik, hogy élsúlyozott skálamentes hálózatokon vizsgált nem egyensúlyi fázisátalakulások hatékonyan vizsgálhatóak γ' effektív fok exponenssel.

A 4.7. egyenletet analizálva, a súlyozatlan hálózatoktól eltérően itt γ' alapján osztályozhatjuk a különböző fertőzésterjedési eseteket:

$\gamma' > 4$: Kis ρ esetén a $Q(\rho, \gamma')$ integrandus a második tagig Taylor-sorba fejthető. Így adódik egy véges $\tilde{\lambda}_c = \langle k' \rangle / A \langle k'^2 \rangle$ fázisátmeneti pont, valamint a ρ aktív pont sűrűség $\rho(\lambda) \sim (\lambda_c - \lambda)$ szerint változik, vagyis a β rendparaméter exponens $\beta = 1$, így ekkor a hagyományos átlagtér-tartományban vagyunk.

$3 < \gamma' < 4$: Ebben az esetben kicsi ρ esetén a sorfejtésnek csak a lineáris tagja létezik. A második tag ρ függése és a következőképp írható fel:

$$a_2(\rho) = -\tilde{\lambda}^2 \rho A \int_{k'_{min}}^{k'_{max}} k'^{-\gamma'} \frac{k'^3}{1 + \tilde{\lambda} k' \rho} dk' \quad (4.8)$$

A fenti összefüggés kicsi de véges ρ esetén levág, amihez tartozik egy k'_{max} levágási érték, amit $\tilde{k}' \sim 1/\rho$ -val jelölünk. Így a fenti összefüggést a következő alakban írhatjuk:

$$a_2(\rho) = -\tilde{\lambda}^2 A \int_{k'_{min}}^{\tilde{k}'} k'^{-\gamma'} k'^3 dk' \sim \rho^{\gamma'-3} \quad (4.9)$$

amiből következik, hogy ρ a kritikus pontban nem kielégítő módon viselkedik:

$$\rho \sim (\lambda_c - \lambda)^\beta, \text{ ahol } \beta = 1/(\gamma' - 3) \quad (4.10)$$

Tehát ez a nemkonvencionális átlagtér-tartomány.

$\gamma' < 3$: Ebben a tartományban már a $Q(\rho, \gamma')$ sorfejtésének első tagja is divergenssé válik, kis ρ esetén. Ezt a viselkedést a 4.9. egyenlethez hasonlóan tudjuk tárgyalni, és kapjuk, hogy $Q(\rho, \gamma) \sim \lambda^{\gamma'-2} \rho^{3-\gamma'}$, amiből következik, hogy a rendszer minden $\lambda \neq 0$ esetben az aktív fázisban van. $\lambda \rightarrow 0$ esetén az aktív pontok sűrűsége a következő képpen tűnik el:

$$\rho \sim \lambda^{(\gamma'-2)/(3-\gamma')} \quad (4.11)$$

Ebben az esetben a határt jelentő $\gamma' = 3$ -ban a rendszer még az aktív fázisban tartózkodik, de a ρ sűrűsége az $|\ln(\rho\lambda)| \sim 1/\lambda$ összefüggés teljesül kis λ esetén.

Így bebizonyítottuk, hogy a [1] cikkben, az egyensúlyi fázisátmenetekre tárgyalt le-skálázás, és az ott használt γ' effektív fokszám exponens nem egyensúlyi fázisátalakulásokra is alkalmazható skálamentes-hálózatokon.

4.2. A végesméret skálázás

Az elméleti megfontolások, mint azt már tárgyaltuk, végtelen méretű rendszerek esetén teljesülnek. Azonban ettől eltérően a Monte-Carlo-szimulációk során a rendszer mérete szükségszerűen véges. A rendszer véges méretéből adódó szingularitások

vizsgálatára a végesméret skálázás módszerét alkalmazzák. Euklideszi rácson vizsgált folyamatok esetén a rendszer viselkedése függ a rendszer L lineáris méretétől, valamint a folyamatok eltérően tárgyalhatóak a rendszerre jellemző d_c kritikus dimenzió alatt és felett. Ha a $d < d_c$ felső kritikus dimenzió alatti tartományban vagyunk, az eltérések az L/ξ hányadtól függenek, ahol ξ a térbeli korrelációs hossz. $d > d_c$ esetén a hagyományos átlagtér-elmélet teljesül, az itt megjelenő végesméret-effektusok ún. veszélyes irreleváns operátorokkal vannak kapcsolatban. Egyensúlyi esetben az elméleti eredmények ([28], [29]) egyelőre nem teljesen egyeznek a numerikus számolásokkal [30]. Nem egyensúlyi folyamatok esetén a végesméret jelenségeket a d_c kritikus dimenzió felett nemrég tárgyalták, [31] és mi is az ebben a cikkben közölt megfontolásokat követjük és általánosítjuk.

Az irányított perkoláció esetén a rendparaméter skálázására a következő összefüggés adódott [31]:

$$\rho = L^{-\beta/\nu'} \tilde{\rho}(\delta L^{1/\nu'}, h L^{\Delta/\nu'}) \quad (4.12)$$

ahol a redukált kontroll paraméter $\delta = \frac{\lambda - \lambda_c}{\lambda_c}$, valamint h a rendező tér erősségét jelöli.

A β rendparaméter exponens és Δ azonosak az átlagtér-közelítésből számolt értékekkel, vagyis $\beta = 1$ és $\Delta = 2$. Ugyanakkor ν' a rendszert térbeli dimenziójától függ $\nu' = 2/d$. A kritikus dimenzió alatt, ami a mi esetünkben $d_c = 4$, a 4.12. skálázási alak a $\nu' \rightarrow \nu$ helyettesítéssel érvényes. A $\delta = 0$ kritikus pontban a $\tilde{\rho}(0, x)$ rendparaméter skálázását már a 4.1. pontban tárgyaltuk és a későbbiekben numerikusan is igazolni fogjuk.

Komplex hálózatok esetén a végesméret-effektusok a rendszer N térfogatától függenek, ami az euklideszi rácok méretével $N = L^d$ kapcsolatban áll. Ezt az analógiát folytatva komplex hálózatokra is felírhatjuk a rendparaméter végesméret skálázási függvényét. Abban az esetben ha a fertőzés egy $k_{typ} \sim \langle k \rangle$ átlagos fokszámból indul ki, akkor

$$\rho_{typ} = N^{-\beta/2} \tilde{\rho}_{typ}(\delta N^{1/2}, h N^{\Delta/2}) \quad (4.13)$$

skálafüggvény adódik. Ha a járvány a $k_{max} \sim N^{1/(\gamma-1)}$ legnagyobb fokú pontból indul ki, a skála függvény a 4.5. definíció alapján módosul:

$$\rho_{max} = N^{-\beta/2+(1-\mu)/(\gamma-1)} \tilde{\rho}_{max}(\delta N^{1/2}, h N^{\Delta/2}) \quad (4.14)$$

Miután a 4.12 egyenletben szereplő $\tilde{\rho}$ nem függ a β rendparaméter exponenstól, így ρ_{typ} és ρ_{max} skálázási függvények a nemkonvencionális átlagtér-tartományban is érvényesek lesznek.

4.3. A Monte-Carlo-szimulációk alkalmazása

A szimulációk fejlesztése során *Debian LINUX (Potato)*, *Kernel 2.2.19pre* operációs rendszer alatt dolgoztam. A programok GNU c++ nyelven, *g++ 2.95.4* fordítóval készültek.

4.3.1. Barabási-Albert hálózat szimulációja

A skálamentes hálózatok szimulációja a 2.2.2. részben leírt Barabási-Albert modell definíciója alapján készült. A hálózatot megvalósító adatszerkezetet `list`, `map` és `multimap` konténerosztályok segítségével írjuk le, amiket struktúrákba rendezve kapjuk a megfelelő szerkezetet. A hálózat m_0 pontszámú, teljesen összekötött gráf-ból indul ki, és a rendszerbe kerülő új pontok a következőképp választják ki az m csatlakozó pontot.

Tekintsünk egy egységnyi hosszú egyenest, amit minden időpillanatban annyi szakaszra osztunk, ahány pont aktuálisan a hálózatban van. Minden ponthoz rendelünk egy szakaszt úgy, hogy a szakasz hossza a 2.5. képlet alapján arányos legyen a ponthoz való csatlakozás valószínűséggel. Ezek után, ha új pont kerül a rendszerbe, a csatlakozás végpontját egy $0 < r \leq 1$ véletlenszámmal tudjuk kiválasztani. A csatlakozó pont az lesz, amelynek a balról nyitott, jobbról zárt intervallumára esik a véletlenszám.

A program bemeneteként m_0 , m és N hálózati pereméteket kell megadni, a kimenet a hálózatot leíró adatsor, a $P(k)$ fokeloszlás valamint az egyes pontok tulajdonságait leíró fájl (1. melléklet).

Adatstruktúra

A hálózat szimulációja során, az ezt leíró gráfot $G_{BA} = [P, E]$ halmazzal definiáljuk. A gráf egy pontját a következő struktúra írja le:

struct Hálózati pont	
long	Azonosító
long	Fokszám
double	Kapcsolódási valószínűség
double	A ponthoz rendelt szakasz végpontja

Ezek után a P ponthalmazt egy map konténer segítségével írhatjuk le:

$$P \equiv \text{map} \langle \text{Azonosító}, \text{Hálózati pont} \rangle$$

valamint az E élhalmazt multimap tárolóval valósítjuk meg:

$$E \equiv \text{multimap} \langle \text{Kiindulópont azonosítója}, \text{Végpont azonosítója} \rangle$$

A fenti két tárolót egy struktúrába rendezve kapjuk meg a G_{BA} halmazt. A szimuláció végén a hálózat letárolására szomszédsági listát alkalmazunk [15].

Programtárgyalás

A kezdeti hálózat létrehozása után az új pontok beszúrását megvalósító algoritmus alkotja program lényegi részét:

```

1:   for i=1 to N do
2:       for j=1 to m do
3:           Nemcsatlakozott=true
4:           while (Nemcsatlakozott)
5:               rand=randomgenerátor()
6:               for Pos=Ponthal.beg() to Ponthal.end() do
7:                   if (rand <= *Pos.Végpont)
8:                       csatlakozás()
9:                       Nemcsatlakozott = false
10:                  break()
11:       do
```

Az 1. sorban szereplő **for** ciklus N -szer hajtja végre a pontbeszúrás műveletét. A 2. sorban az aktuálisan beszúrandó pont m élein szaladunk végig egyesével. A 3. sorban használt **Nemcsatlakozott** logikai változó a folyamat állapotát jelöli. Ezek után a 4. sorban szereplő **while** ciklus addig iterálódik, amíg az aktuális él nem csatlakozik egy ponthoz a hálózatban. Ehhez szükséges egy véletlen szám, amit az 5. sorban lévő **randomgenerátor()** függvény ad. Ezek után a 6-7. sorban végigmegyünk a pontlistán, és vizsgáljuk sorban minden egyes pontnál a hozzá rendelt szakasz végpontját. Ha ez a véletlen számnál nagyobb vagy egyenlő lesz, akkor megtaláltuk a keresett csatlakozó pontot. Végül a 8-10. sorokban összekötjük az aktuális pontot a kijelölt ponttal és kilépünk a legbelső **for** és **while** ciklusból.

Az algoritmus futásideje legrosszabb esetben $T(N) = \Theta(N^2)$ mivel $N \gg m_0$, így a futásidőt leíró függvény $f(a) = N^2 m_0 m \approx N^2$ alakban közelíthető. Legjobb és egyben átlagos esetben a futásidő közel $T(N) \approx \Omega(N)$ lineáris, mivel a pontok szinte mindig a legnagyobb fokszámú pontokhoz csatlakoznak, amelyek a tárolt adatstruktúra elején találhatóak, így a 6. sorban lévő ciklus csak egy kis konstans taggal befolyásolja a program futásidejét.

4.3.2. Kontakt folyamat modellezése élsúlyozott Barabási-Albert hálózaton

A kontakt folyamatokat modellező program bemenetként egy, a fenti módon szimulált Barabási-Albert hálózat szomszédsági-éllistas ábrázolását kéri. Ezen kívül meg kell adni m_0 , m , N hálózati paramétereket, a vírus t iterációs számát, a μ gyógyulási rátát, a λ betegedési rátát, a μ súlyozási exponenst valamint hány pontból álljon a mérés sorozat ami az átlagos rendparamétert méri a betegedési ráta függvényében, rögzített gyógyulási ráta esetén. Ezen kívül meg kell adni, hogy két mérési pont között mekkora különbség legyen, a kezdőpont típusát (legnagyobb fokszámú, vagy egy véletlenszerűen kiválasztott átlagos fokszámú pont), hány realizációt szeretnénk készíteni, valamint az átlagos kontroll paramétert hány időlépésre átlagolja.

A kimenet több adatfájlból áll, amelyek információt adnak a folyamatok során lezajlott jelenségekről, azonban minden eredmény nagyszámú realizációra van átlagolva. A kimeneti fájlok a $m(\lambda)$, $\langle R^2(t) \rangle$, $P(k)$, $N_a(t)$ tulajdonságokat tartalmazzák, valamint a kihalás, a pontkeltés időbeli alakulását, és a hálózatot leíró adatsorokat (1. melléklet).

Adatstruktúra

A rendszert leíró adatstruktúra itt is konténerek és struktúra osztályok segítségével épül fel. A hálózat ebben a programban is szomszédsági éllistával van tárolva, azonban a pontok tulajdonságai megváltoztak:

struct Hálózati pont	
long	Azonosító
int	Szín
long	Szülő azonosítója
long	Kezdőponttól való távolság
list	Éllista

A fentiekkel szemben az éleket is struktúrával írjuk le:

struct Él	
long	Végpont
float	Élsúly

A hálózaton belül, az egy ponthoz tartozó éleket egy listába fűzzük, és csatoljuk az adott ponthoz, a pontot definiáló struktúra utolsó tagjában:

$$E \equiv \text{list } \langle \text{Él} \rangle$$

Végül a pontokat egy `map`-be rendezve kapjuk a végső újragenerált adatszerkezetet:

$$G_{BA} \equiv \text{map } \langle \text{Pontazonosító}, \text{Pont} \rangle$$

Programtárgyalás

A program a hálózatot leíró gráf beolvasásával valamint inicializálással kezdődik, amely során minden egyes élhez a 3.1. képlet alapján kiszámítjuk az élsúlyokat, valamint a kiinduló ponttól számított legrövidebb utakat [15]. A program lényegét a fertőzésterjedés leíró eljárás adja. A vírus az első lépésben vagy a legnagyobb, vagy egy véletlenszerűen kiválasztott átlagos fokszámú pontból indul.

```

1:   for (tSzámológó=1 to t) do
2:       for (Pos=Beteglista.beg() to Beteglista.end()) do
3:           Betegpont=*Pos
4:           BAhálózat.keres(Betegpont)
5:           FertőzöttPontlista=fertőzés(Betegpont.éllista)
6:           Újbeteglista.hozzáfűz(FertőzöttPontlista)
7:           Újbeteglista.rendez()
8:       Pos=Beteglista.beg()
9:       while (Pos!=Beteglista.end())
10:           Betegpont=*Pos
11:           BAhálózat.keres(Betegpont)
12:           gyógyulás(Betegpont)
13:           if (meggyógyult)
14:               Beteglista.töröl(Betegpont)
15:           else
16:               Pos++
17:       do
18:   Beteglista.összefűz(Beteglista,Újbeteglista)

```

A vírusterjedés során a beteg pontokat egy listában tároljuk, amit folyamatosan frissítünk minden iterációban. Az 1. sor t időlépésen keresztül lépteti a vírust a rendszerben. A kontakt folyamat két, egy időlépésen belül független, egymással párhuzamos folyamatra bontható.

Az fertőzés folyamata a 2-8. sorokban szerepel. Itt az előző iterációból származó beteglistát végigjárva (2.sor), minden egyes betegpont éllistáját kikeresve (3-4. sor), az abban szereplő szomszédokra meghívjuk a `fertőzés()` eljárást (5. sor). Ezek után az adott pont új fertőzött szomszédainak listáját hozzáfűzzük az adott időlépésben megfertőződött új beteg pontok listájához, és ezt rendezzük (6-7. sor)

A gyógyulás megvalósításához az előző iterációból származó beteglistát járjuk újra végig, és minden abban szereplő pontra meghívjuk a `gyógyulás()` eljárást (9-12.sor). Ha az aktuális pont meggyógyult, töröljük az listából, ha nem továbblépünk (13-16. sor). Az algoritmus legvégén az aktuális iterációban megfertőződött pontok listáját és azokét, amik fertőzöttek maradtak, összefésüljük, majd továbblépünk a következő iterációra.

Az algoritmus futásidejét $f(N) = t(N + N)$ függvénnyel lehet leírni, azonban valós esetben $t \approx 2N$ így felső korlátot $T(N) \simeq O(N^2)$ módon lehet közelíteni. Ez egy nagyon durva becslés, mivel a rendszer sajátosságai (élsúlyozás, inhomogén feloszlás, ...) nagyban befolyásolják a futásidőt, ezenkívül a fertőzési, gyógyulási folyamatok, a keresési, rendezési és összefésülő eljárások is növelik azt.

5. fejezet

Eredmények bemutatása, értelmezése

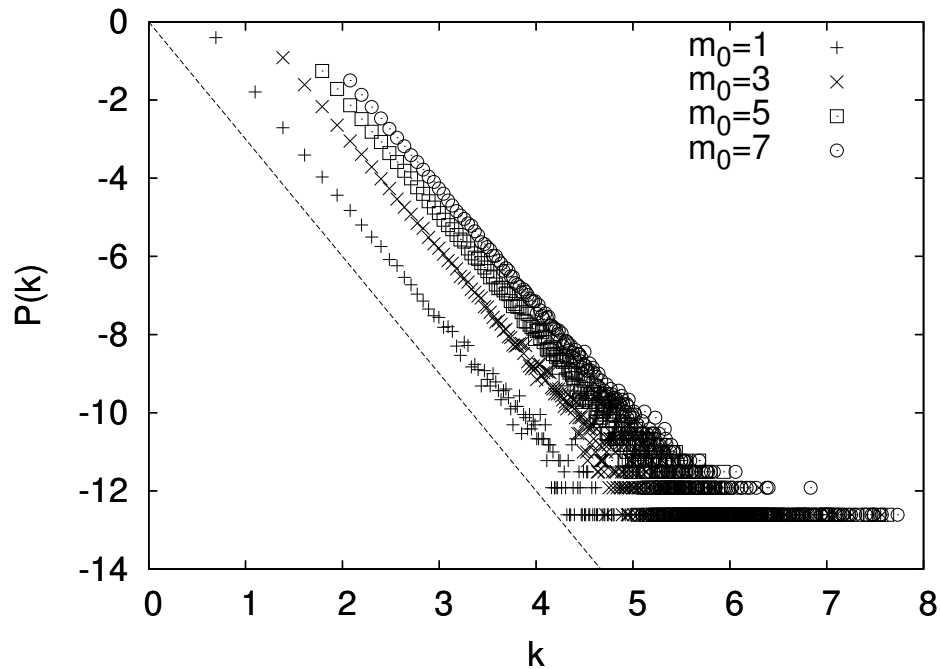
5.1. Kontakt folyamat vizsgálata élsúlyozott Barabási-Albert hálózaton

Numerikus vizsgálataim során $\gamma = 3$ fokszám exponensű élsúlyozott Barabási-Albert hálózatokon vizsgáltam Kontakt folyamatokat. Minden mérésorozat esetén $N = 64, 128, 256, 512, 1024$ méretű hálózatokon mértem. $m_0 = m = 1$ voltak a hálózatok peremétere, így $\langle k \rangle = 2$ -nek adódott. A 3.1 egyenletben szereplő μ súlyozási exponens minden szimuláció során $\mu = 0.5$ -nek választottam, így az effektív fokszám exponens $\gamma' = 5$ -nek adódott, tehát a hagyományos átlagtér-tartományban vagyunk.

A numerikus számolások során a fertőzést mindig egy pontból indítottam, vagy a maximális fokszámú pontot, vagy egy átlagos fokszámú pontot jelölve origónak.

5.1.1. Barabási-Albert hálózat szimulációja

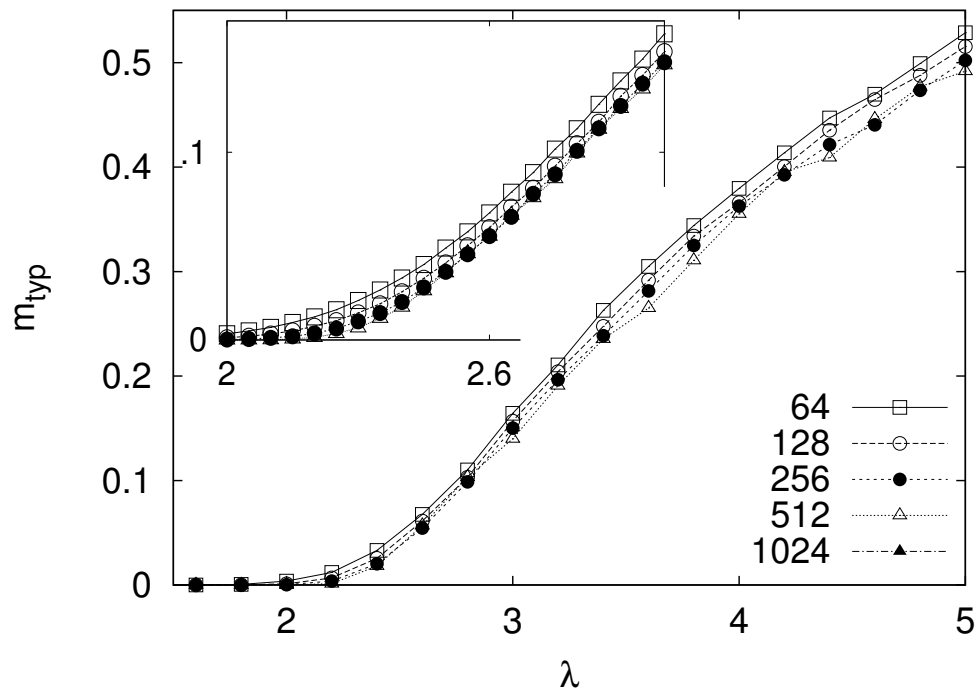
A szimuláció [2] cikkben közölt modell alapján készült, és helyességének bizonyítására az első célom a fent említett cikkben közölt eredmények reprodukálása volt. A szimulációk $m_0 = m = 1, 3, 5, 7$ kezdeti paraméterekkel indultak, és mind a négy esetben a pontszám $N = 300000$ volt. Az eredményül kapott fokeloszlásokat log-log skálán ábrázolva jól látszik, hogy az eloszlások egy $\gamma = -3$ meredekségű egyenesre illeszkednek, így pontosan a várt irodalmi értéket kaptam vissza, ezzel igazolva eljárásom helyességét.



5.1. ábra. **Barabási-Albert hálózat fokeloszlása.** Az ábrán rendre $m_0 = m = 1, 3, 5, 7$ kezdeti paraméterekkel indított hálózatok fokeloszlása látható, ahol minden esetben $N = 300.000$ volt. A szaggatott vonal egy $\gamma = -3$ meredekségű egyenest ábrázol.

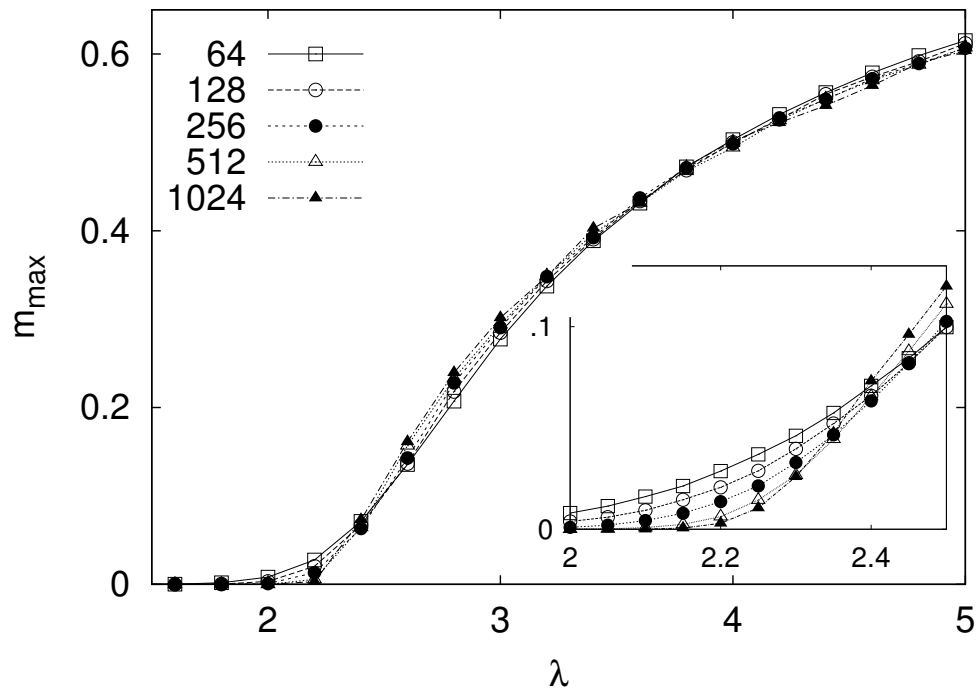
5.1.2. Kontakt folyamat szimulációja

A kontakt folyamatok szimulálása során azokat a tulajdonságokat vizsgáltam, melyek a vírusterjedés stacionárius állapotában szintén időfüggetlenné válnak. Alapvetően két értéket mértem, a ρ_i betöltési szám átlagos értékét (4.1. egyenlet), valamint a $m_i = N_a/N$ átlagos rendparamétert λ függvényében. Ez a két érték a kritikus pont környékén feltételezésünk szerint arányos lesz.



5.2. ábra. Átlagos rendparaméter a fertőzési valószínűség függvényében tipikus fokszámból kiinduló fertőzés esetén. A külső ábrán $\lambda = 1..5$ tartomány látható. A pontok $R = 1000 - 16000$ realizáció átlagából származnak. A belső ábra $\lambda = 2..2.8$ tartományt ábrázolja. Itt az átlagolás $R = 10000 - 160000$ realizációra történt.

Első közelítésben az m rendparaméter λ betegedési rátától való függését vizsgáltam meg mind tipikus (5.2.ábra), mind maximális (5.3.ábra) fokú kezdőpont esetén. Jól láthatóan, a termodinamikai határesetben fázisátalakulás történik. A fázisátalakulási pont környezete a belső ábrákon látható, amelyeken azonban jól kivehetők a véges méretből származó eltérések.



5.3. ábra. Átlagos rendparaméter a fertőzési valószínűség függvényében maximális fokszámból kiinduló fertőzés esetén. A külső ábrán $\lambda = 1..5$ tartomány látható. A pontok $R = 1000 - 16000$ realizáció átlagából származnak. A belső ábra $\lambda = 2..2.5$ tartományt ábrázolja. Itt az átlagolás $R = 10000 - 160000$ realizációra történt.

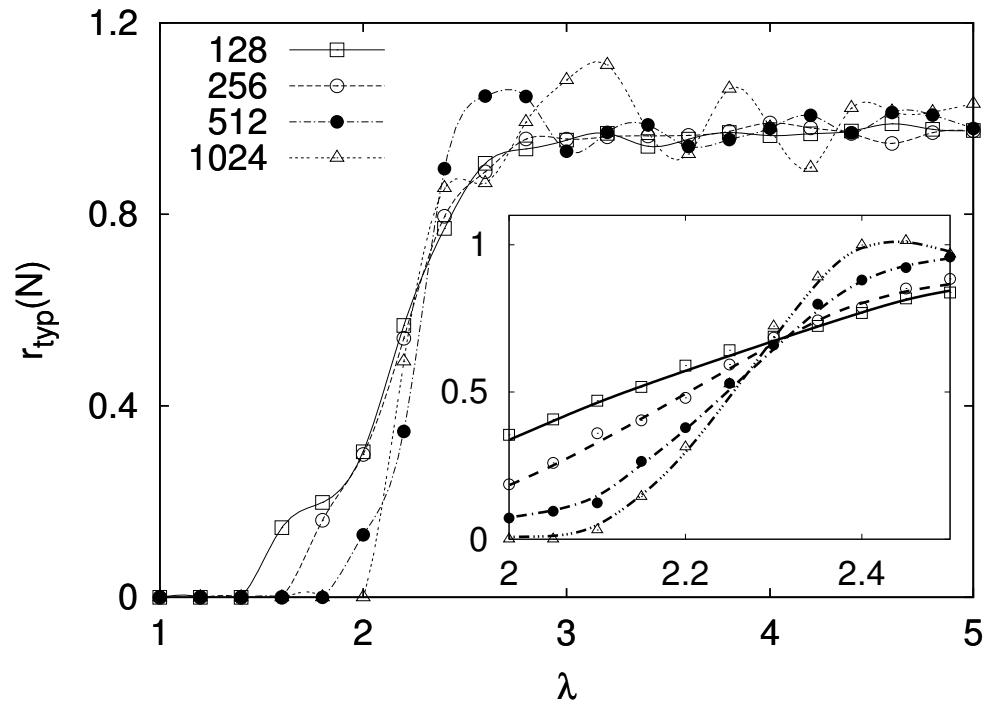
5.1.3. Kritikus exponensek meghatározása

A λ_c kritikus pont és az x végesméret exponens meghatározása

A hagyományos skálázási törvényeket követve feltehetjük, hogy a nem egyensúlyi-fázisátmenet során a kritikus pont közelében ($\delta \ll 1$) az m rendparaméter a következőképp viselkedik:

$$m(\delta, N) = N^{-x} \tilde{m}(\delta^\nu N) \quad (5.1)$$

ahol x a végesméret exponens. A $\delta = 0$ kritikus pontban szemlélve a rendszert, az 5.1. egyenlet $m(\delta = 0, N) = N^{-x} \text{const}$ alakba megy át. Ebben az esetben, ha N és



5.4. ábra. $r(N) = m(N)/m(N/2)$ rendparaméterek hányadosa tipikus fokszerű pontból kiindulva. Az külső ábrán $\lambda = 1..5$ a belső ábrán $\lambda = 2..2.5$ tartomány látható.

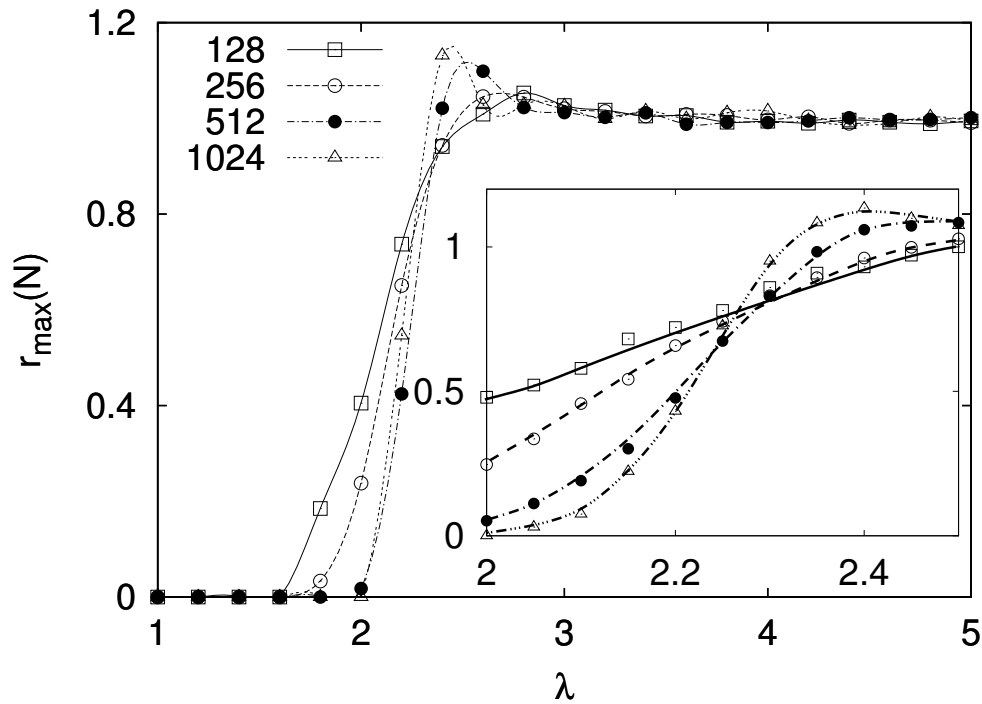
$N/2$ méretű hálózatokat veszünk, felírhatjuk a következő hányadost:

$$r(N) = \frac{m(\delta = 0, N)}{m(\delta = 0, N/2)} = \frac{(N)^{-x}}{(N/2)^{-x}} = 2^{-x} \quad (5.2)$$

ami alkalmas az x paraméter meghatározására.

Ha a fenti tárgyalás alapján ábrázoljuk a különböző N és $N/2$ méretű hálózatok rendparamétereinek hányadosait, azok metszik egymást. A metszéspont abszcisszája a kritikus λ_c valószínűséget adja, az ordinátájáról pedig a 2^{-x} értéket olvashatjuk le (5.4-5.5 ábra.).

Így az ábrákról leolvasható, hogy a kritikus pont kis hibával a két esetben megegyezik, $\lambda_c = 2.30(1)$, azonban a végesméret exponensek eltérőek. Tipikus esetben $x_{typ} = 0.54(5)$, ami összhangban van a 4.13. egyenletből várt $x_{typ} = \beta/2 = 1/2$ értékkel. Maximális esetben a 4.14. egyenlet alapján $x_{max} = \beta/2 - (1 - \mu)/(\gamma - 1) = 1/4$

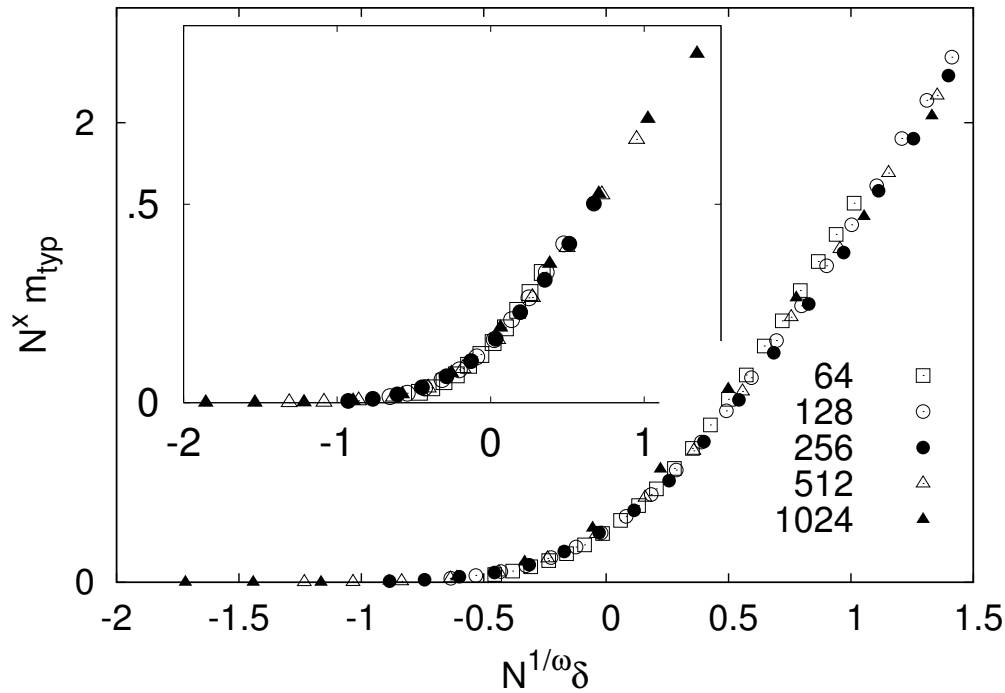


5.5. ábra. $r(N) = m(N)/m(N/2)$ rendparaméterek hányadosa maximális foksámú pontból kiindulva. Az külső ábrán $\lambda = 1..5$ a belső ábrán $\lambda = 2..2.5$ tartomány látható.

értéket várunk, amit a numerikus eredmények által kapott $x_{max} = 0.27(3)$ érték is igazol.

Az ω korrelációs térfogat exponens meghatározása

A következőkben a kritikus pont környékén történő korrelációt vizsgáljuk, és célunk megadni a $\mathcal{V}$ korrelációs térfogat és δ közötti összefüggést. $\mathcal{V}$ a fázisátmeneti pont környezetében $\mathcal{V} \sim |\delta|^{-\omega}$ hatványfüggvény szerint viselkedik, ahol ω a korrelációs térfogat exponens. A térelméleti tárgyalásainkból (4.13.- 4.14. egyenlet) következően $\omega = 2$ értéket várjuk a numerikus eredményekből, tipikus és maximális foksámú kiindulási pont esetén is. $\mathcal{V} \sim \mathcal{N}$ határesetben az $\tilde{m} = mN^x$ szerint skálázott rendparaméter várhatóan függ $N^{1/\omega}\delta$ -tól. Ezt a függést ábrázolva az egyes méretekhez tartozó adatsoroknak össze kell skálázódnuk. A 5.6. ábrán a fenti összefüggést ábráztuk a korábban meghatározott x és λ_c értékeket beírva. A összeskálázódás a vártaknak



5.6. ábra. **Rendparaméter összeskálázódása a kritikus fázisátalakulási pont közelében.** Az egyes adatsorok a különböző méretű hálózatokhoz tartoznak, a külső ábrán tipikus, a belső ábrán maximális fokú kiindulási pont esetén. Az összeskálázáshoz a korábban már meghatározott λ_c és x értékeket rögzítettük, és ω -t variálva határoztuk meg az egybeesést.

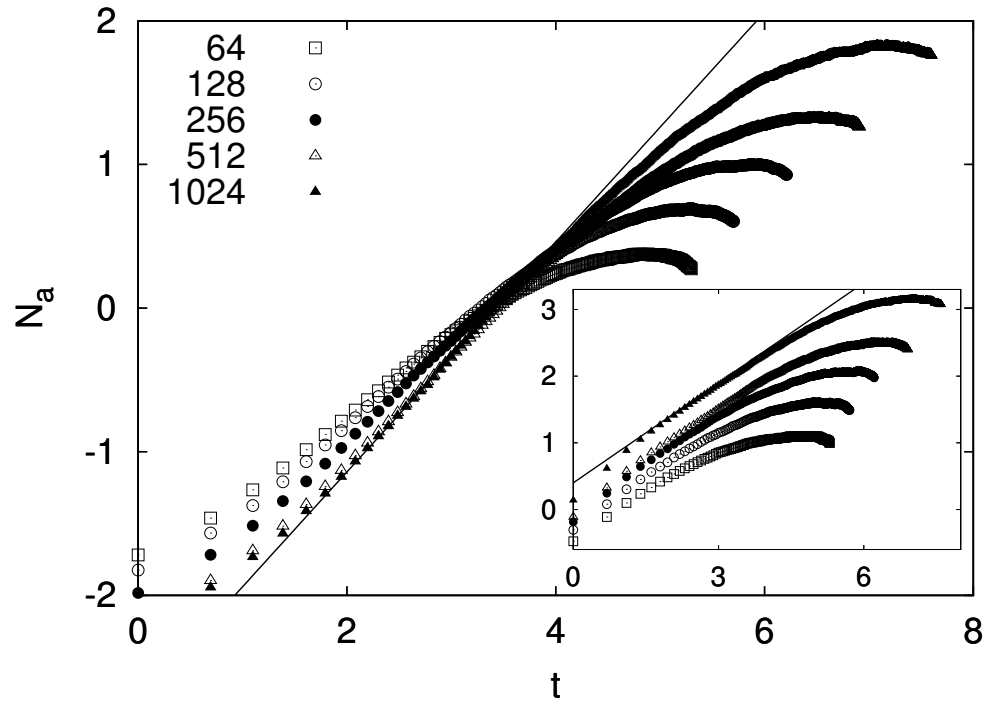
megfelelően $\omega_{typ} = 2.05(10)$ és $\omega_{max} = 2.00(5)$ korrelációs térfogat exponensek esetén következett be, ezzel is igazolva elméletünk helyességét.

Az átlagtér eredménytől ($\nu_{mf} = 0.5$) való eltérést a hiperskálázási összefüggés segítségével tudjuk magyarázni. Tudjuk, hogy a fázisátmenethez tartozik egy felső kritikus d_c dimenzió, ami alatt ($d < d_c$) a ν exponens a $2 - \alpha = d\omega^*$ szabály szerint viselkedik, a kritikus dimenzió felett ($d > d_c$) pedig az átlagtér-elmélettel közelíthető. Ez a hipotézis egyensúlyi fázisátmenetekre egzaktul bizonyított, de feltevésünk szerint a mi rendszerünk is hasonlóképpen igaz. Az átlagtér-közelítés értékeit véve, ott $\alpha_{mf} = 0$ és $\nu_{mf} = 0.5$ exponensek adódnak. Behelyettesítve α_{mf} -et a hiperskálázási összefüggésbe kapjuk, hogy $d\omega^* = 2$.

A mi rendszerünk esetén $d = 4$ így visszakaptuk a $\omega^* = \nu_{mf} = 0.5$ exponenst, így

az eredményeink egyeznek az átlagtér-közelítés alapján várt értékkel.

Az a dinamikai exponens meghatározása



5.7. ábra. **Az aktív pontok számának időfüggése egy pontból kiinduló fertőzés esetén.** A külső ábrán tipikus pontból kiinduló, a belső ábrán maximális pontból kiinduló fertőzés esetén van log-log skálán ábrázolva a $N_a(t)$ függvény. A tipikus esetben jól látszik a dinamikai exponens végesméret effektusok által okozott rendszerméret függése. Az illesztett egyenesek $a_{eff}^{typ} = 0.8$ valamint $a_{eff}^{max} = 0.5$ effektív dinamikai exponensek értékét adják meg. Az ábrázolt adatsorok $R = 40000$ realizáció átlagából származnak.

A dinamikai exponens szemléletesen azt adja meg, hogy milyen gyorsan jut az origóból kiinduló fertőzés a stacionárius állapotba egy adott méretű hálózaton a kritikus fázisátmeneti pontban. Ennek mérésére a vírusterjedés során az N_a aktív pontok számát figyeltem az idő függvényében, mikor a fertőzés egy pontból indult, maximális vagy átlagos fokú esetben. Az így kapott adatsorok relaxációs szakaszára egyenest illeszthetünk, így egy $N_a \sim t^a$ hatványfüggvénnyel jellemezhetjük, ahol a a dinamikai exponens effektív értékét jelöli. A vizsgált kritikus exponens erősen függ a modellezett

rendszer méretétől, ha egy átlagos fokszerű pontból indulunk, azonban határesetben $a_{typ} = 0.98(5)$ érték adódik, ami jól illeszkedik az átlagtér-elméletből várt $a_{mf} = 1$ értékkel. Legnagyobb fokú esetre extrapolációval $a_{max} = 0.57(2)$ dinamikai exponens látszik.

A korrelációs térfogat exponensre felírhatjuk, hogy $\mathcal{V} \sim N \sim n_a/m_i \sim N_a^{1/(1-x)}$, miután $m_i \sim N^{-x}$ és $m_i = N_a/N$. Ezek után bevezetve $\zeta = (1-x)/a$ paramétert a fenti reláció alapján felírhatjuk $t \sim \mathcal{V}^\zeta$ skálázást. Ezt tipikus esetre kiszámolva $\zeta = 0.47(5)$ adódik, ami jól illeszkedik az elméletből származó $\zeta = 0.5$ értékkel, azonban maximális fokú kiindulási pont esetén $\zeta = 1.28(5)$ más értéket mutat. Ezek után a $N \sim \delta^{-\omega}$ relációból kiindulva becslést adhatunk a τ relaxációs idő viselkedésére. Ez a kritikus pont környékén szintén egy $\tau \sim \delta^{-\nu^\parallel}$ hatványfüggvénnyel jellemezhető, mint azt már a 2.3.1. részben már tárgyaltuk. A időbeli korrelációs exponens jelen esetben $\nu^\parallel = \zeta\omega$ alakban írható, amelybe a fenti eredményeket visszaírva kapjuk, hogy $\nu_{typ}^\parallel = 0.96(5)$ és $\nu_{max}^\parallel = 2.5(1)$. Ezeket az értékeket összehasonlítva az $\nu_{mf}^\parallel = 1$ átlagtér-elméletből várt exponenssel, jó közelítéssel ismét az átlagos fokú pontból kiinduló fertőzés méréséből származó érték egyezik meg azzal.

6. fejezet

Összefoglalás

Diplomamunkámban nem egyensúlyi fázisátalakulásokat vizsgáltunk élsúlyozott skálamentes hálózatokon. Annak érdekében, hogy reális hálózatokhoz hasonlóan, melyek fok exponense $\gamma \leq 3$, ilyen folyamatokat tudjunk szimulálni, az élekhez egy fokszám-függő újraskálázással súlyokat rendeltünk. Az ilyen jelenségek tárgyalására általánosan használt átlagtér-közelítést alkalmaztunk a nem egyensúlyi folyamat elméleti leírására. Ennek segítségével három γ függő tartományt sikerül azonosítani, attól függően, hogy milyen korrekciókkal teljesülnek az átlagtér-elméletből várt értékek.

Monte-Carlo-szimulációk segítségével a hagyományos átlagtér-tartományban sikerült jó közelítéssel visszakapnunk a az elméleti közelítésből származó kritikus exponensek értékeit. A skálamentes hálózatok realizációjára Barabás-Albert hálózati modellt használtunk, $\gamma = 3$ fok exponenssel. A rendszerben történő nem egyensúlyi fázisátalakulásokat, a irányított perkoláció univerzalitási osztályba tartozó kontakt folyamat szimulációjával vizsgáltuk.

A numerikus eredményeket vizsgálva térelméleti megfontolásokkal magyaráztuk a véges méretből származó szingularitásokat a kritikus dimenzió felett, a hagyományos átlagtér-tartományban. Ezen kívül bevezettük a rendszer térfogatát a folyamatokat

jellemző skálázási törvényekbe.

Vizsgálódásaink során a fertőzésterjedési eljárást két különböző kezdőfeltétellel indítottuk. Egy átlagos foksámú pontból kiinduló folyamat jó közelítéssel tárgyalható az átlagtér-közelítéssel. Az egyes tulajdonságokat jellemző exponensek jól illeszkednek az elméletből várt értékekre. Ezzel szemben egy jól összekötött pontot véve origónak, új lokális skálázási exponensek jelennek meg.

Az itt elvégzett vizsgálatok továbbfejlesztéseként tanulmányozhatnánk olyan fázisátalakulásokat, amelyek irányított élsúlyozott skálamentes hálózatokon mennének végbe, vagyis a folyamat nem csak az immunizációtól függne, hanem az élek orientáltságától is. Ezzel talán sikerülne még jobban leírni a valós életben lejátszódó jelenséget.

Összességében elmondhatjuk, hogy az általunk felvetett problémákat sikerült megmagyarázni, és a későbbiekben eredményeinket potenciálisan felhasználhatják valós, számítógépeken, vagy humán hálózatokon terjedő vírusok vizsgálatára, és megfékezésére.

A diplomamunkában közölt eredményekről publikáció készült *Nonequilibrium phase transitions and finite size scaling in weighted scale-free networks* címmel [32].

Nyilatkozat

Alulírott fizikus-informatikus szakos hallgató, kijelentem, hogy a diplomadolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök és szoftverek) használtam fel.

Tudomásul veszem azt, hogy diplomamunkámat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában, a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

Karsai Márton

Szeged, 2005.04.27.

Köszönetnyilvánítás

Hálával és köszönettel tartozom konzulensemnek Iglói Ferenc Professzor Úrnak, azért a sok segítségért és jobbitó szándékú kritikáért, mellyel fáradhatatlanul egyengette diplomamunkám elkészítését. Belém vetett bizalma, bátorítása biztosította azt az emberi háttérrel, mely szakmai előmenetelemhez és tanulmányaim elvégzéséhez nélkülözhetetlen volt.

Köszönetemet szeretném kifejezni továbbá Juhász Róbertnek, hogy áldozatkészen és gyakorlati módon segítette munkám elkészülését.

Külön köszönet illeti Heiko Rieger Professzor Urat, mert saarbrückeni tanulmányi ösztöndíjam idején lehetőséget biztosított számomra a zavartalan munkára, és minden eszközzel segítette azt.

Köszönöm még Raja Paulnak, Árgyelán Miklósnak, Szállás Attilának, Sophie Latouche-nak, Koncz Krisztiánnak és Györkös Gábornak szakmai és emberi segítségét.

Hálás vagyok szüleimnek, hogy annyira bíztak bennem, segítettek leküzdeni minden akadályt, és szeretüket élvezem mind a mai napig.

Hálával tartozom ezen kívül testvéreimnek Eszternek és Mátyásnak, valamint barátaimnak, akik lankadatlan bátorításukkal támogattak tanulmányaim során, akik nélkül talán sohasem írhattam volna meg ezeket a sorokat.

Irodalomjegyzék

- [1] Giuraniuc, C.V., Hatchett, J.P.L., Indekeu, J.O., Leone, M., Pérez Castillo, I., Van Schaeuybroeck, B. és Vanderzande, C. *Trading interaction for topology in scale-free networks* preprint, e-print:arXiv:cond-mat/0408399 (2004)
- [2] Barabási, A.L. és Albert, R. *Statistical Mechanics of Complex Networks*. Rev. Mod. Phys., **74** 47-97 (2002)
- [3] Hooyberghs, J., Iglói, F. és Vanderzande, C. *Absorbing state phase transition with quenched disorder*. Phys. Rev. E, **69** 066140 (2004)
- [4] Erdős, P. és Rényi, A. *On random graphs. I*. Publ. Math. (Debrecen), **6** 290 (1959)
- [5] Erdős, P. és Rényi, A. *On the evolution of random graphs*. Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., **5** 17 (1960)
- [6] Erdős, P. és Rényi, A. *On the evolution of random graphs. II*. Bull. Inst. Int. Stat., **38** 343 (1961)
- [7] Watts, D.J. és Strogatz, S.H. *Collective dynamics of 'small-world' networks*. Nature(London), **393** 440 (1998)
- [8] Albert, R., Jeong, H. és Barabási, A.L. *The diameter of the world wide web*. e-print:arXiv:cond-mat/9907038 (1999)

- [9] Barabási, A.L., Albert, R. és Jeong, H. *Mean-field theory for scale-free random networks*. Physica A.(Amsterdam), **272** 173 (1999)
- [10] Barabási, A.L. és Albert, R. *Emergence of Scaling in Random Networks*. Science, **286** 509 (1999)
- [11] Iglói, F. és Turban, L. *First- and second-order phase transitions in scale-free networks*. Phys. Rev. E, **66** 036140 (2002)
- [12] Hinrichsen, H. *Nonequilibrium Critical Phenomena and Phase Transitions into Absorbing State*. Adv. Phys., **49** 815 (2000)
- [13] Marro, J és Dickman, R. *Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models* Cambridge University Press. (Cambridge, 1999)
- [14] Landau, L.D. és Lifsic, E.M. *Elméleti Fizika V*. Tankönyvkiadó 149.§ (Budapest, 1981)
- [15] Cormen, T.H., Leiserson, C.E., Rivest, R.L. és Stein, C. *Új algoritmusok* The MIT Press - Scolar Kiadó (Budapest 2003)
- [16] Ódor, G. *Universality classes in nonequilibrium lattice systems*. Rev. Mod. Phys., **76** 663-724 (2004)
- [17] Wilson, K.G. *Renormalization Group and Critical Phenomena. I. Renormalization Group and the Kadanoff Scaling Picture* Phys. Rew. B, **4** 3174 (1971)
- [18] Wilson, K.G. *Renormalization Group and Critical Phenomena. II. Phase-Space Cell Analysis of Critical Behavior*. Phys. Rew. B, **4** 3184 (1971)
- [19] Pastor-Satorras, R. és Vespignani, A. *Epidemics and immunization in scale-free networks*. WILEY-VCH Verlag Berlin GmbH, (Berlin 2004)

- [20] Pastor-Satorras, R. és Vespignani, A. *Epidemic Spreading in Scale-Free Networks*. Phys. Rev. Lett., **86** 3200 (2001)
- [21] Pastor-Satorras, R. és Vespignani, A. *Epidemic dynamics and endemic states in complex networks* Phys. Rev. E, **63** 066117 (2001)
- [22] Barabási, A.L. és Dezső, Z. *Halting viruses in scale-free networks* Phys. Rev. E, **65** 055103 (2002)
- [23] May, R.M. és Lloyd, A.L. *Infection dynamics on scale-free networks* Phys. Rev. E, **64** 066112 (2001)
- [24] Leone, M., Vazquez, A., Vespignani és Zecchina, R. *Ferromagnetic ordering in graphs with arbitrary degree distribution* Eur. Phys. J. B, **28** 191 (2002)
- [25] Dorogovtsev, S.N., Goltsev, A.V. és Mendes, J. F. F. *Ising model on networks with an arbitrary distribution of connections* Phys. Rev. E, **66** 016104 (2002)
- [26] Dorogovtsev, S.N., Goltsev, A.V. és Mendes, J. F. F. *Potts model on complex networks* Eur. Phys. J. B, **38** 177 (2004)
- [27] Callaway, D.S., Newman, M.E.J., Strogatz, S.H. és Watts, D.J. *Network Robustness and Fragility: Percolation on Random Graphs* Phys. Rev. Lett., **85** 5468 (2000)
- [28] Brézin, E. *An investigation of finite size scaling* J. Phys. (France) **85** 15 (1982)
- [29] Zinn-Justin, J. és Brézin, E. *Finite size effects in phase transitions* Nucl. Phys. B **257** 867 (1985)
- [30] Luijten, E. és Blöte, H.W.J. *Finite-Size Scaling and Universality above the Upper Critical Dimensionality* Phys. Rev. Lett. **76**, 1557 (1996);
- [31] Lübeck, S. és Janssen, H.K. *Finite-size scaling of directed percolation above the upper critical dimension* (preprint) (2005)

- [32] Karsai, M., Juhász, R. és Iglói, F. *Nonequilibrium phase transitions and finite size scaling in weighted scale-free networks* (publikálás alatt) e-print: arXiv:cond-mat/0504666 (2005).

Képjegyzék:

2.2 ábra : Watts, J. W. és Strogatz, S. H., Nature (London), **393** 441 (1998)

2.4 ábra : Hinrichsen, H., Adv. Phys., **49** 815 (2000)