BEVEZETÉS A DIFFERENCIÁLGEOMETRIÁBA

Gergely Árpád László

Tartalomjegyzék:

I. TOPOLÓGIKUS TEREK

DEFINÍCIÓ: Az (X, τ) párost topológiai térnek nevezzük, ha X halmaz és τ az X alhalmazainak olyan osztálya, amelyre teljesülnek:

(1) $O_i \in \tau$ $\forall i$ esetén $\longrightarrow$ $\bigcup_i O_i \in \tau$

(2) $O_i \in \tau$ $\forall i$ esetén $\longrightarrow$ $\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \tau$ (véges számú alhalmaz metszete)

(3) $\emptyset$ üres halmaz: $\emptyset \in \tau$; $X \in \tau$

τ topológia az X halmazon

τ elemei nyílt halmazok

□

példák topológikus terekre:

1° $\forall$ X halmaz topológikus térré tehető ha

a) $\tau =$ az X összes részhalmazainak halmaza $(\tau = 2^X)$
(diszkrét topológia)

b) $\tau = \{\emptyset, X\}$ (indiszkrét topológia)

2° legyen X végtelen halmaz

álljon τ az üres halmazból $(\emptyset \in \tau)$ és az összes olyan H halmazból, melyekre $X - H$ véges

megj: ezen a példán látható, hogy a definíció (2) pontjában az alhalmazok véges száma lényeges kikötés.

3° a metrikus terek természetes topológiája

ha X metrikus tér, vagyis tetszőleges $x, y \in X$ esetén $\exists$ $g(x,y)$ valós szám, amelyre teljesülnek a következők:

- $g(x,y) \geq 0$; $g(x,y) = 0 \longleftrightarrow x = y$ (pozitív definit metrika)
- $g(x,y) = g(y,x)$ (szimmetria)
- $g(x,z) \leq g(x,y) + g(y,z)$

minden $x \in X$ pontban $\exists\, r$ sugarú $S(x,r)$ nyílt gömb:

$$S(x,r) = \{ y \mid \varrho(x,y) < r \}$$

Az X pozitív definit metrikájú metrikus tér topológiai térré tehető, ha $\mathcal{T}$ az olyan $\mathcal{G}$ halmazokból áll, amelyekre:

$$\forall x \in \mathcal{G} \text{ esetén } \exists\, r > 0 \text{ u.h. } S(x,r) \subseteq \mathcal{G}$$

($\mathcal{G}$ minden pontja körül van egy nyílt kis gömb $\mathcal{G}$-ben)

4° $(\mathbb{R}, \mathcal{T} = \text{a nyílt intervallumok halmaza})$ topológikus tér, innen származik a nyílt halmaz elnevezés $\mathcal{T}$ elemeire

5° ha $(X_1, \mathcal{T}_1)$ és $(X_2, \mathcal{T}_2)$ topológikus terek, $(X_1 \times X_2,\ (\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)\text{-k egyesítései})$ szintén topológikus tér.

Sajátos esetben: $(\mathbb{R}^n$, nyílt intervallumok Descartes-szorzatainak egyesítései$)$ topológikus tér.

$\mathbb{R}^n$ fenti topológiáját <u>standard topológiának</u> nevezik.

<u>megj.</u> $\mathbb{R}^n$ topológikus tér alatt a standard topológiával felruházott $\mathbb{R}^n$-t kell érteni.

$\square$

<u>DEFINÍCIÓ</u>: $(X, \mathcal{T})$ topológikus térben W <u>környezete</u> $x \in X$ pontnak, ha tartalmaz x-et tartalmazó O_i halmazt

<u>DEFINÍCIÓ</u>: C <u>zárt halmaz</u>, ha komplementere nyílt $(X-C\in\tau)$

<u>megj</u>: 1° $\emptyset$ és X egyszerre nyílt és zárt, mert egymásnak komplementerei

2° zárt halmazokkal is értelmezhető a topológikus tér, ekkor $\left(\bigcap_i C_i\right)$ és $\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right)$-re kell megkövetelni a zártságot

3° $A\subset X$ nem feltétlenül nyílt v. zárt.
(pl. $[a,b)$ $\mathbb{R}$-n)

<u>DEFINÍCIÓ</u>: (X,τ) topológikus tér <u>összefüggő</u>, ha egyedül $\emptyset$ és X nyílt és zárt halmazok egyidőben.

<u>megj</u>: a sokaságok összefüggősége biztosítja, hogy a dimenzió globális jellemző lehessen

<u>DEFINÍCIÓ</u>: 1° $A\subset X$ <u>lezárása</u> $(\bar{A})$ az összes A-t tartalmazó zárt halmaz metszete

2° $A\subset X$ <u>belseje</u> $(\text{int } A)$ az összes olyan nyílt halmaz egyesítése, amelyeket A tartalmaz

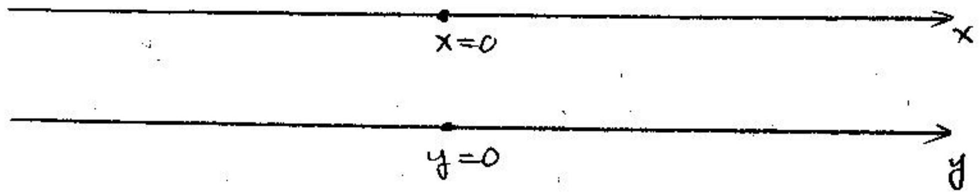
3° $A\subset X$ <u>határa</u> $(\dot{A}$ vagy $\partial A) = \bar{A}-\text{int } A$

<u>Szétválasztási axiómák</u>

<u>DEFINÍCIÓ</u>: 1° (X,τ) topológikus tér <u>T_0/T_1</u>, ha $\forall$ két különböző pont közül legalább az egyikhez / mindkettőhöz van olyan a pontot tartalmazó O_i amely a másik pontot nem tartalmazza.

2° (X,τ) topológikus tér <u>Hausdorff (T_2)</u>, ha $\forall$ két különböző $x,y\in X$ esetén $\exists$ $O_x, O_y\in\tau$ u.h. $O_x\cap O_y=\emptyset$

<u>ellenpélda</u>: álljon X a két egyenes pontjaiból, u.h. az $x=y<0$ pontokat azonosaknak tekintjük de $x=y=0$ pontokat már nem.



$x=0$ és $y=0$ pontokra sérül a Hausdorffitás

<u>megj.</u> 1° a Hausdorffitás a differenciálegyenletek megoldásainak létezéséhez szükséges feltétel

2° $T2 \to T1 \to T0$

<u>DEFINÍCIÓ</u>: (X,τ) topológiai tér <u>T3</u> ha $\forall\, x \in X$ és zárt $C \subset X$ esetén $\exists\, O_x$ és $\exists\, O_c$ $(C \subset O_c,\ x \in O_x)$ u.h. $O_x \cap O_c = \emptyset$ $\quad (T3 \not\Rightarrow T0, T1, T2)$

□

<u>DEFINÍCIÓ</u>: $A \subset X$ <u>nyílt lefedése</u> olyan $\{O_i\}$, hogy $A \subset \bigcup_i O_i$

<u>DEFINÍCIÓ</u>: $A \subset X$ <u>kompakt</u>, ha $\forall$ nyílt lefedéséből kiválasztható véges számú O_i u.h. $\{O_i\}_{i=\overline{1,n}}$ szintén lefedés

<u>példa</u>: zárt és korlátos intervallumok[x], kör (S^1), gömb (S^2)

<u>ellenpélda</u>: $(0,1)$ nyílt intervallum, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$

a $(0,1)$ nyílt intervallum esetén $O_k = \left(\frac{1}{k}, 1\right)$, $k = 2,3,\ldots$ nyílt lefedésből nem választható ki véges számú, amelyek szintén lefedést alkotnának.

<u>DEFINÍCIÓ</u>: $A \subset X$ <u>lokálisan kompakt</u>, ha $\forall\, x \in A$ pontnak $\exists$ olyan W nyílt környezete, melynek lezárása $(\overline{W})$ kompakt

<u>példa</u>: $(0,1)$ nyílt intervallum, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$

<u>DEFINÍCIÓ</u>: $\{V_i\}$ nyílt lefedést <u>lokálisan végesnek</u> nevezzük, ha $\forall\, x \in X$-nek $\exists$ olyan W nyílt környezete, amely csak véges számú V_i-t metsz.

<u>DEFINÍCIÓ</u>: $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér <u>parakompakt</u>, ha X $\forall \{O_i\}$ nyílt lefedéséből előállítható egy $\{V_j\}$ lokálisan véges lefedés, u.h. minden V_j részhalmaza valamely O_i-nek.

<u>példa</u>: 1° $\mathbb{R}^n$, S^m és szorzattereik

2° minden Hausdorff, lokálisan kompakt, kompakt alhalmazok megszámlálható uniójából előálló topologikus tér

3° minden összefüggő, Hausdorff, a <u>II.</u> megszámlálhatósági axiómának eleget tevő topologikus tér

<u>megj.</u> sokaságszerkezettel ellátott parakompakt topologikus terek (parakompakt sokaságok) esetén minden $\{V_i\}$ lokálisan véges lefedéshez $\exists$ <u>egységpartíció</u>

(olyan $\{f_\alpha\}$ sima függvények, amelyekre:

1.) f_α tartója (azon halmaz lezárása, melyen f_α nem tűnik el) részhalmaza valamely V_i-nek

2.) $0 \leq f_\alpha \leq 1$

3.) $\sum_\alpha f_\alpha = 1$)

- Az egységpartíció segítségével fontos lokális eredmények globálissá tehetők.

  pl: minden V_i-n $\exists$ $(g_i)_{ab}$ metrika. Az egységpartíció segítségével értelmezhető $g_{ab} = \sum_i f_i (g_i)_{ab}$ globális Riemann-metrika

- Az egységpartíció lehetővé teszi integrálás értelmezését.

(bizonyítások [3]-ban)

□

DEFINÍCIÓ: $(X,\mathcal{T})$ topologikus tér eleget tesz az I. megszámlálhatósági axiómának, ha $\forall\ x\in X$-re van olyan megszámlálható $\{V_i\}$, hogy x-et tartalmazó $\forall$ W nyílt halmaz tartalmazza valamelyik V_i-t

példa: minden, a II. megszámlálhatósági axiómának eleget tevő topologikus tér

DEFINÍCIÓ: $(X,\mathcal{T})$ topologikus tér eleget tesz a II. megszámlálhatósági axiómának, ha $\exists$ megszámlálható $\{V_i\}$ u.h. $\forall$ O nyílt V_i-k egyesítéseként állítható elő.

példa: minden parakompakt topologikus tér [3]

□

DEFINÍCIÓ: ha $(X,\mathcal{T})$ és $(Y,\mathcal{S})$ topologikus terek, az $f: X \to Y$ leképezés

1° folytonos, ha $f^{-1}[O]\in\mathcal{T}$, $\forall\ O\in\mathcal{S}$
(nyílt halmaz ősképe nyílt)

2° homeomorf, ha f kölcsönösen egyértelmű leképezés és f meg f^{-1} folytonos

megj: a homeomorfizmus „nyílt halmaz tartó" leképezés.
algebrai analógia az izomorfizmus („művelettartó" leképezés)

DEFINÍCIÓ: homeomorf leképezéssel (homeomorfizmussal) egymásba vihető topológiai terek homeomorfak

megj: a homeomorfia reflexív, szimmetrikus és tranzitív, tehát ekvivalenciareláció
vagyis ha két tér homeomorf, topológiai szempontból nem tekintendők különbözőnek

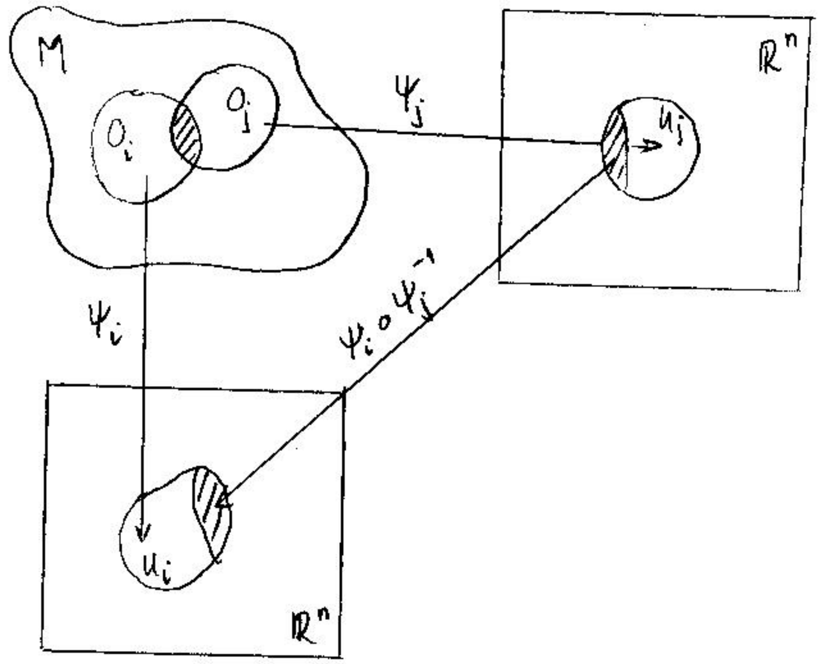
II DIFFERENCIÁLHATÓ SOKASÁGOK

DEFINÍCIÓ: M halmazt <u>valós (komplex) C^r/analitikus sokaságnak</u> nevezzük, ha $(M, \{O_i\})$ topologikus tér köv. tulajdonságokkal:

(1) $\{O_i\}$ lefedése M-nek

(2) $\forall i$-re $\exists\ \Psi_i : O_i \to U_i$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, ahol $U_i \subset \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$ nyílt és Ψ_i invertálható

(3) $O_i \cap O_j \neq \emptyset$ esetén $\Psi_i \circ \Psi_j^{-1} : \Psi_j[O_i \cap O_j] \to \Psi_i[O_i \cap O_j]$ C^r/analitikus leképezés $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$-beli nyíltról $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$-beli nyíltra.



Ψ_i leképezés neve <u>térkép</u> v. <u>lokális koordináta rendszer</u>

O_i <u>lokális koordináta-környezet</u>

x^a <u>lokális koordináták</u> $\Psi_i(p)$ pont koordinátái $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$-ben $p \in O_i$

(O_i, Ψ_i) térképek gyűjteményét <u>atlasznak</u> nevezzük

két atlasz <u>kompatibilis</u>, ha uniójuk is atlasz

az összes kompatibilis atlaszból álló atlasz a <u>teljes atlasz</u>

<u>megj.</u> 1° ha M összefüggő, az összes térkép $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$-be visz át

ilyenkor <u>$\dim M = n$.</u>

$(\dim \partial M = n-1)$

2° a C^r sokaság <u>differenciálható</u>, ha $r \neq 0$

<u>DEFINÍCIÓ</u>: M sokaság <u>orientálható</u>, ha van olyan atlasz, hogy minden $O_i \cap O_j \neq \emptyset$ -ra $\left|\frac{\partial x^a}{\partial x'^b}\right| > 0$

(x^a ill. x'^a koordináták U_i ill. U_j-ben, $\left|\frac{\partial x^a}{\partial x'^b}\right|$ a Jacobianus)

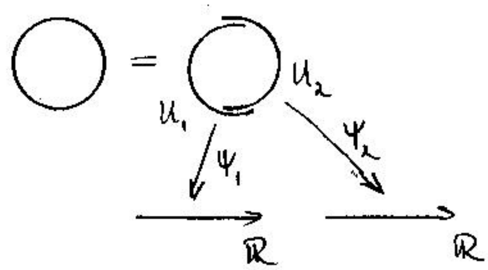
□

<u>példák sokaságokra</u>

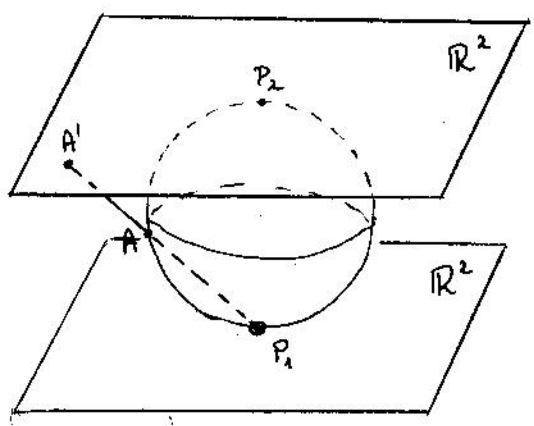
1° <u>$\mathbb{R}^n$</u>, elegendő egyetlen térkép: az azonos leképezés

2° <u>S^m</u>, nem elegendő egyetlen térkép

pl: S^1



pl: S^2



- az egyik térkép P_1 pont kivételével S^2 összes pontját leképezi a felső $\mathbb{R}^2$-re ($A \to A'$)
- a másik térkép P_2 pont kivételével S^2 összes pontját leképezi az alsó $\mathbb{R}^2$-re

3° <u>$\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$</u> komplex projektív tér

$\mathbb{P}_n(\mathbb{C}) = \{ \mathbb{C}^{n+1}$ origón átmenő komplex egyeneseinek halmaza$\}$

$\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ a következő ekvivalenciarelációval $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$-vé tehető:

$z, z' \in \mathbb{C}^{n+1}$ ekvivalensek, ha $\exists\, c \neq 0$ u.h. $z' = cz$

legyenek $\{z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}\}$ koordináták $\mathbb{C}^{n+1}$-ben

legyenek $U_k = \{ p \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z_k(p) \neq 0 \}$ nyílt halmazok

ekkor $\xi_i^{(k)} = \frac{z_i}{z_k} = \frac{z_i'}{z_k'}$ (kihagyva $\xi_k^{(k)} = 1$ -t) n drb koordináta $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$-ben (U_k ősképében) pl: $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = S^2$

biz. $\{z_1, z_2\}$ koordináták $\mathbb{C}^2$-ben

U_2-ben $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ lokális koordináta

U_1-ben $\frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ lokális koordináta

U_1 és U_2 tekinthető két db $\mathbb{R}^2$-nek, amelyekre S^2-t leképezzük. Valóban U_1 minden pontját tartalmazza $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$-nek, kivéve a $z_1 = 0$-t. Hasonlóan S^2 felső $\mathbb{R}^2$ síkja P_1 kivételével S^2 összes pontját tartalmazza

4° Csoportsokaságok: a csoportot definiáló reprezentációban a szabad paraméterek tere

pl: $\mathbb{Z}_2$ = a (-1)-vel való szorzás csoportja, elemei ± 1

$\longrightarrow \mathbb{Z}_2 = S^0$ (két pont) (az egyenlőség homeomorfizmust jelöl)

$\longrightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = S^n/\mathbb{Z}$ (a gömb ellentett pontjait azonosítani kell)

pl: $U(1)$ egységmodulusú komplex számokkal való szorzás csoportja, vagyis $e^{i\theta}$-val való szorzásé, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
Mivel θ a felsett tartományon a kört paraméterezi:

$\longrightarrow U(1) = S^1$

pl: $SU(2)$ mátrix általános alakja $u = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, $\det u = 1$

$a = x_1 + i x_2$
$b = x_3 + i x_4$; $\det u = |a|^2 + |b|^2 = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 1$

Mivel $\{x_i, i = \overline{1,4}\}$ fenti feltétellel S^3-t paraméterezi:

$\longrightarrow SU(2) = S^3$

pl: $SO(3)$ mátrix : $O^t = O^{-1}$, rang $O = 3$; $\det O = 1$
(forgatások $\mathbb{R}^3$-ban). Mivel $SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2$

$\longrightarrow SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2 = S^3/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

5° Szorzatsokaságok

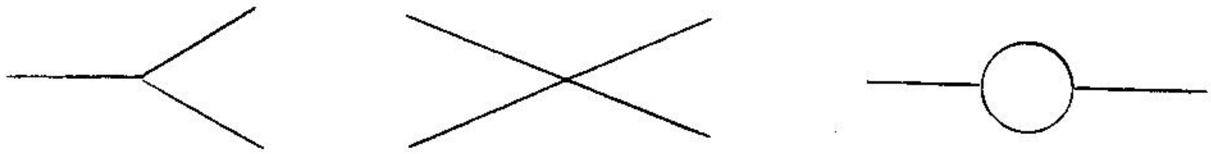
legyen M, M' két sokaság $\dim M = n$, $\dim M' = n'$

$M \times M'$ szorzatsokaság, ha $\left(O_i \times O_j', (\psi_i, \psi_j') \right)$ atlasz

pl: $S \times \mathbb{R}^3$, $S^2 \times \mathbb{R}^2$, $S^3 \times \mathbb{R}$

□

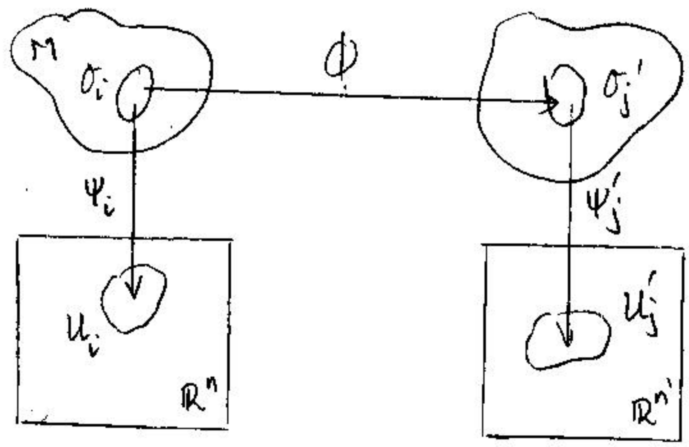
Ellenpéldák



(valamennyi esetben a halmazoknak vannak olyan részei, amelyek nem leképezhetőek le $\mathbb{R}$-re; lokálisan nem olyanok, mint egy egyenes)

□

DEFINÍCIÓ: $\phi: M \to M'$ sokaságok közötti leképezést C^r-nek nevezzük, ha $\psi_j' \circ \phi \circ \psi_i^{-1} : U_i(M) \subset \mathbb{R}^n \to U_j'(M') \subset \mathbb{R}^{n'}$ is C^r



DEFINÍCIÓ: ha két sokaság között létezik C^r leképezés, $r \geq 1$, amelynek az inverze is C^r, a leképezést C^r-diffeomorfizmusnak, a sokaságokat pedig diffeomorfnak nevezzük

megj.: a diffeomorf sokaságok sokaságszerkezete azonos, mert a diffeomorfizmus ekvivalencia reláció

III. VEKTOROK

A továbbiakban M összefüggő, parakompakt, Hausdorff, C^∞ sokaság, $\dim M = n$ véges.

Sokaságon értelmezett függvények

DEFINÍCIÓ: $f: M \to \mathbb{R}$ a sokaságon értelmezett függvény

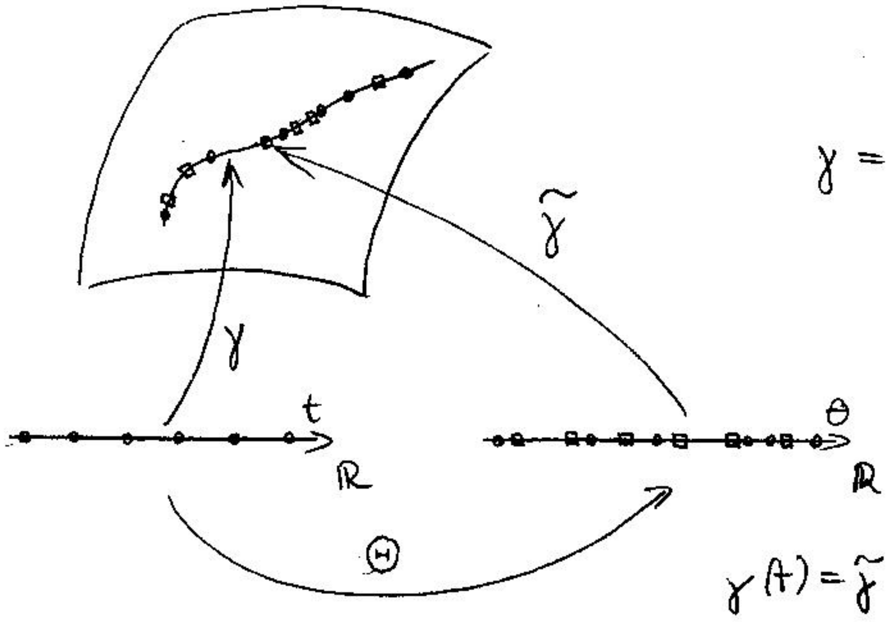
f C^r $p \in M$ pontban, ha $f \circ \Psi^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény C^r $\Psi^{-1}(p)$ pontban

f C^r $H \subset M$ általánosan, ha C^r minden $p \in H$-ban

Sokaság görbéi. Tangenstér

DEFINÍCIÓ: $\gamma: \mathbb{R} \to M$ C^r-leképezést C^r-görbének nevezzük.

megj. ha két görbének ugyanaz a képe, ugyanannak a görbének különböző paraméterezéseiről beszélünk



$\gamma = \tilde{\gamma} \circ \Theta$

$\theta = \Theta(t)$

$\frac{d\theta}{dt} > 0$

$\gamma(t) = \tilde{\gamma}(\Theta(t)) = \tilde{\gamma}(\theta)$

DEFINÍCIÓ: a görbéhez tangens, $V = \frac{\partial}{\partial t}$ kontravariáns vektor egy olyan operátor, ami a görbe minden pontjában a görbén értelmezett f függvényt számmá képezi le

$$V(f)_\gamma\Big|_{t_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_\gamma\Big|_{t_0} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left[f(t_0+s) - f(t_0)\right] \left(= \mathcal{L}_V f\right)$$

szabály szerint. (tehát V iránymenti derivált)

megj. 1° V, mint iránymenti derivált, rendelkezik köv. tulajdonságokkal:

(1) $V(af+bg) = aV(f) + bV(g)$; $a,b \in \mathbb{R}$ (linearitás)

(2) $V(fg) = f(p)\,V(g) + g(p)\cdot V(f)$ (Leibnitz szabály)

2° $f = C$-re (1)-ből: $V(Cf) = C\cdot V(f)$
(2)-ből: $V(f\cdot f) = 2f\cdot V(f) = 2C\cdot V(f)$ $\Big\} \to V(C) = 0$

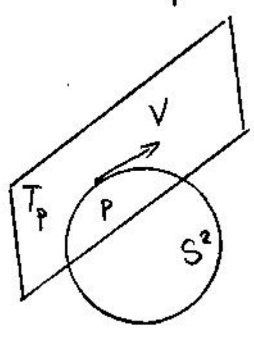
3° $V(t) = 1$

4° a paramétercsere a görbe tangensvektorai hosszának megváltozásával jár: $\tilde{V} = \frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{dt}{d\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial t} = \frac{dt}{d\theta}\cdot V$

Mivel a tangensvektor egy sebességjellegű mennyiség, a paramétercsere a görbén való haladási sebesség megváltozását jelenti.

DEFINÍCIÓ: a p ponton átmenő összes görbe tangensei a p pontbeli T_pM tangensteret alkotják.

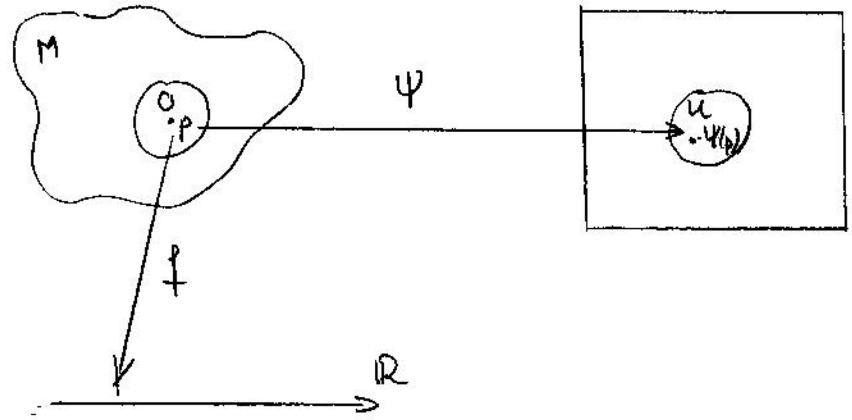
pl: $M = S^2$



megj. T_pM vektortér $\mathbb{R}$-en

ÁLLÍTÁS: ha $\dim M = n$ és $p \in M$, akkor $\dim T_pM = n$

biz. egy n elemből álló bázis explicit konstrukciója:



legyen $X_{\underline{a}}(f)\big|_p = \dfrac{\partial}{\partial x^{\underline{a}}}\left(f \circ \Psi^{-1}\right)\Big|_{\Psi(p)}$

(az aláhúzott index a különböző vektorokat számozza meg, és nem egy vektor komponensét jelöli!)

① $\{X_{\underline{a}}\}$ n drb. vektor lin. független: $(\alpha^a X_{\underline{a}} = 0 \rightarrow \alpha^a = 0)$

red. ad abs.: • feltételezzük h. $\alpha^1 \neq 0$; $\alpha^b = 0$, $b = \overline{2,n}$

akkor $\alpha^a X_{\underline{a}} = 0 \longrightarrow X_{\underline{1}}(f) = 0$

vagyis $\dfrac{\partial}{\partial x^1}\left(f \circ \Psi^{-1}\right)\Big|_{\Psi(p)} = 0$

ami tetszőleges f-re lehetetlen

• $\forall$ egyéb feltételezés is sérti f tetszőleges voltát

② $\{X_{\underline{a}}\}$ bázist alkot:

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, C^∞ függvényekre: $F(x) = F(a) + (x^b - a^b) H_b(x)$; $H_b(a) = \dfrac{\partial F}{\partial x^b}\Big|_{x=a}$

legyen $F = f \circ \Psi^{-1}$; $a = \Psi(p)$

$$\underbrace{\left(f \circ \Psi^{-1}\right)\left(\Psi(q)\right)}_{\underbrace{f \circ \Psi^{-1}(\Psi(q))}_{f(q)}} = \underbrace{\left(f \circ \Psi^{-1}\right)\left(\Psi(p)\right)}_{f(p)} + \Big(\underbrace{\Psi^b(q)}_{\underbrace{x^b(\Psi(q))}_{x^b \circ \Psi(q)}} - \underbrace{\Psi^b(p)}_{x^b \circ \Psi(p)}\Big) \cdot H_b\left(\Psi(q)\right)$$

$$f(q) = f(p) + \left(x^b \circ \Psi(q) - x^b \circ \Psi(p)\right) H_b\left(\Psi(q)\right)$$

$$V(f) \underset{\uparrow}{=} V\left(f(p)\right) + \left(x^b \circ \Psi(q) - x^b \circ \Psi(p)\right)\Big|_{q=p} \cdot V\left(H_b \circ \Psi\right) + \left(H_b \circ \Psi\right)\Big|_p \cdot V\left(x^b \circ \Psi - x^b \circ \Psi(p)\right) =$$

Leibnitz szabály

$$\underset{\uparrow}{=} H_b(\Psi(p)) \cdot V(x^b \circ \Psi) = \frac{\partial (f \circ \Psi^{-1})}{\partial x^b}\Big|_{\Psi(p)} \cdot V(x^b \circ \Psi) = \left(V^b \frac{\partial}{\partial x^b}\right)(f)$$

$V(C) = 0$

$\longrightarrow V = V^b \frac{\partial}{\partial x^b}$, $\forall\, V \in T_pM$ fölírható $\{X_a\}$-k lineáris kombinációjaként

□

<u>DEFINÍCIÓ</u>: 1° $\left\{\frac{\partial}{\partial x^a}\right\}$ <u>koordinátabázis</u> v. <u>holonóm rendszer</u> T_pM-n

2° <u>általános</u> $\{E_a\}$ <u>bázist</u> 4 dimenzióban <u>tetraédnak</u> nevezzük
3 dimenzióban <u>triádnak</u>

□

<u>a bázis cseréjének hatása a koordinátákra</u>

- $E'_b = \Phi_b{}^a E_a$

  $V = V^a E_a = V'^b E'_b = V'^b \Phi_b{}^a E_a \longrightarrow V^a = \Phi_b{}^a V'^b \longrightarrow V'^b = \left(\Phi^{-1t}\right)^b{}_a V^a$

- koordinátabázisok esetén:

  $$\frac{\partial}{\partial x'^b} = \frac{\partial x^a}{\partial x'^b} \frac{\partial}{\partial x^a} \longrightarrow \Phi_b{}^a = \frac{\partial x^a}{\partial x'^b} \longrightarrow \boxed{V'^b = \frac{\partial x'^b}{\partial x^a} V^a}$$ (ez gyakran a vektor definíciója)

  pl: ha a báziscsere egy Lorentz-transzformáció: $x'^b = \Lambda^b{}_a x^a$

  $$\longrightarrow \frac{\partial x'^b}{\partial x^a} = \Lambda^b{}_a \longrightarrow V'^b = \Lambda^b{}_a V^a$$ (Λ a Lorentz-mátrix)

□

<u>DEFINÍCIÓ</u>: a sokaság összes pontjainak tangensterei alkotják a <u>tangensnyalábot</u> : $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$

<u>megj.</u> 1° $\dim TM = 2n$, ha $\dim M = n$

2° $\{x_a\}$ M-beli és $\{V^a\}$ T_pM-beli koordináták együttesen TM-nek egy $\{x_a, V^b\}$ lokális koordinátázását adják

3° $\pi : TM \to M$, $\pi(p, V) = p$ projekciós operátor

4° $S : M \to TM$, $S(p) = V \in T_pM$ a nyalábnak egy szelése: a sokaság minden pontjához hozzárendeli a pont tangensterének valamely vektorát.
Így egy <u>vektormezőt</u> kapunk

□

<u>vektorok kommutátora</u>

<u>DEFINÍCIÓ</u>: $[V, W] = VW - WV \quad (= \mathcal{L}_V W)$

<u>megj.</u> 1° $[V, W]f = V(W(f)) - W(V(f))$ létezéséhez $W(f)$ és $V(f)$ nemcsak egy pontban, hanem annak környezetében is értelmezett kell hogy legyen, tehát a kommutátor TM-n művelet és nem T_pM-n !

2° mivel a vektorok iránymenti deriváltak, általában <u>nem kommutálnak</u> (kivétel: koordinátabázis vektorok)

$$\frac{\partial}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial x^b} = \frac{\partial}{\partial x^b}\frac{\partial}{\partial x^a}$$

$$[E_{\underline{a}}, E_{\underline{b}}] = D^c_{ab} E_{\underline{c}} \quad ; \quad D^c_{ab} = -D^c_{ba} \text{ kommutációs együtthatók}$$

ÁLLÍTÁS: két vektor kommutátora ugyancsak vektor

biz. koordinátabázisban: $U = U^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $V = V^j \frac{\partial}{\partial x^j}$

$$[U,V](f) = (UV - VU)f = U^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(V^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - V^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(U^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) =$$

$$= U^i V^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + U^i \frac{\partial V^j}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^j} - V^i U^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - V^i \frac{\partial U^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} =$$

$$= \left(U^i \frac{\partial V^j}{\partial x^i} - V^i \frac{\partial U^j}{\partial x^i}\right) \frac{\partial}{\partial x^j}(f)$$

$$\longrightarrow \boxed{[U,V]^j = U^i \frac{\partial V^j}{\partial x^i} - V^i \frac{\partial U^j}{\partial x^i}}$$

megj.: TM a kommutátor művelettel $[\cdot,\cdot]$ Lie-algebrát alkot, mert teljesülnek:

1.) $[\cdot,\cdot]$ bilineáris
2.) $[U,V] = -[V,U]$
3.) a Jacobi-azonosság teljesül:

$$[U,[V,W]] + [V,[W,U]] + [W,[U,V]] = 0$$

ha $[E_{\underline{a}}, E_{\underline{b}}] = D^c_{ab} E_{\underline{c}}$-ben D^c_{ab} állandók, a Jacobi-azonosságból következik: $D^e_{d[a} D^d_{bc]} = 0$

□

DEFINÍCIÓ: 1-paraméteres diffeomorfizmus-csoportot alkotnak a $\Phi: \mathbb{R} \times M \to M$ leképezések, ha:

1.) rögzített $t \in \mathbb{R}$ esetén $\Phi_t: M \to M$ diffeomorfizmus
2.) $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$ $(\longrightarrow Id = \Phi_t \circ \Phi_{-t} = \Phi_0)$

megj. rögzített $p \in M$ esetén $\Phi_p: \mathbb{R} \to M$ az 1-paraméteres diffeomorfizmus-csoport egy pályája, ugyanakkor görbe M-ben. A görbék nem metszhetik egymást

ÁLLÍTÁS: a vektormezők és 1-paraméteres diffeomorfizmus csoportok között egyértelmű megfeleltetés van.

biz: „⇐" az 1-paraméteres diffeomorfizmus-csoport pályáinak tangensei vektormezőt alkotnak.

Ezen vektorok az 1-paraméteres diffeomorfizmus-csoport infinitezimális generátorainak tekinthetők

„⇒" a) minden vektormezőhöz tartozik egy integrálgörbe-sereg, mert koordinátabázisban

$$\frac{dx^i}{dt} = V^i\left(x^1(t), \dots, x^n(t)\right)$$

közönséges elsőrendű differenciálegyenlet-rendszernek mindig van megoldása és a megoldás egyértelmű. Az így meghatározott $x^i(t)$-k egy $\gamma(t)$ görbe koordinátái, melyhez V minden pontban érintő

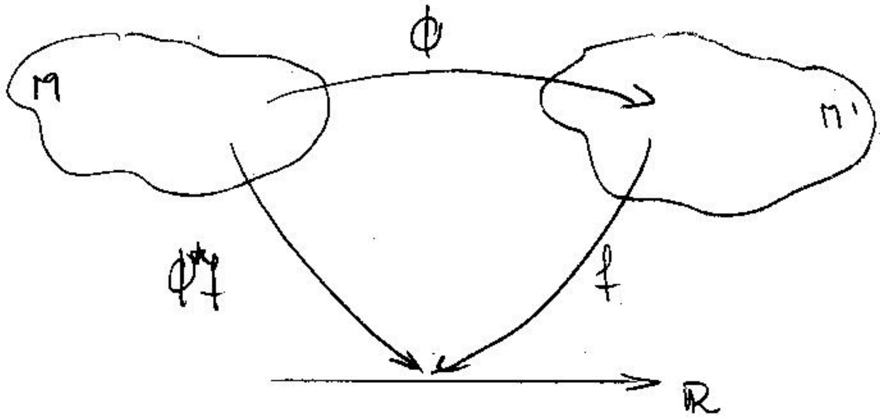
b.) az integrálgörbék ismeretében legyen $\Phi_t(p)$ az a pont, ami a p-n átmenő integrálgörbén p-től $\underline{\underline{t}}$ paraméternyi távolságban van

megj: V vektormezőhöz fenti módon hozzárendelt Φ_t általában <u>lokális 1-param. diffeomorfizmus csoport</u>, ami azt jelenti, hogy $t < \varepsilon$ (t nem fut végig az egész $\mathbb{R}$-en)

A következőkben tekintünk $\Phi : M \to M'$ sokaság-leképezést (sajátos esetben Φ 1p. d. cs. eleme)

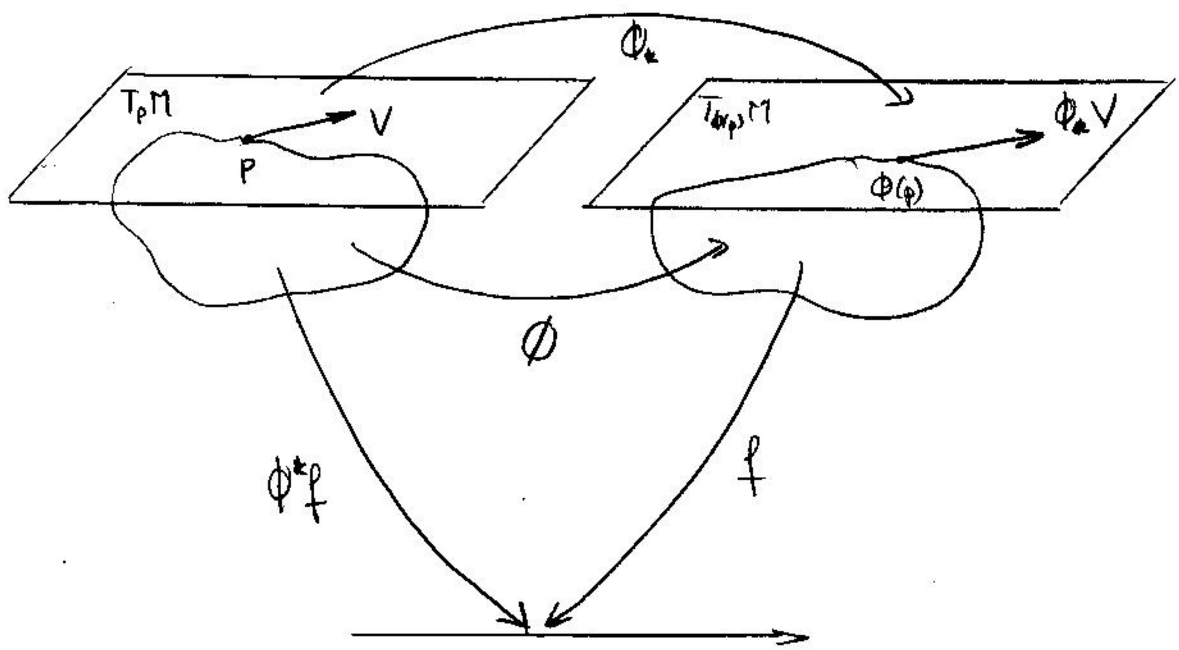
<u>DEFINÍCIÓ</u>: egy f függvény Φ által létrehozott <u>visszahúzottja</u>

$$(\Phi^* f)(p) := f(\Phi(p)) = (f \circ \Phi)(p) \qquad \text{(„pull-back")}$$



<u>DEFINÍCIÓ</u>: egy V vektor Φ által létrehozott <u>előretoltja</u>

$$(\Phi_* V)(f)\big|_{\Phi(p)} := V(\Phi^* f)\big|_p = V(f \circ \Phi)\big|_p \qquad \text{(„push-forward")}$$



<u>megj</u>: 1° koordinátabázisban Φ_* mátrix megegyezik a leképezés Jacobi-mátrixával: ${\Phi_*}^a{}_b = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b}$ (mert $V = V^b \frac{\partial}{\partial x^b}$; $\Phi_* V = {\Phi_*}^a{}_b V^b \frac{\partial}{\partial x'^a}$)

2° a $V' \in T_{\Phi(p)} M'$ vektor visszahúzottja $\exists$ ha Φ diffeomorfizmus: $\Phi^* V' := (\Phi^{-1})_* V'$

IV. 1-FORMÁK

DEFINÍCIÓ: az $\omega: T_pM \to \mathbb{R}$ lineáris leképezést 1-formának vagy kovariáns vektornak nevezzük

megj. általában $\omega: X \to \mathbb{R}$ 1-forma, ha X vektormező

DEFINÍCIÓ: az összes $\omega: T_pM \to \mathbb{R}$ 1-forma alkotja a kotangens teret, jelölése T_p^*M.

megj. 1° T_p^*M a T_pM duális vektortere

2° T_p^*M és T_pM izomorf vektorterek

biz. legyen $\{E_{\underline{b}}\}_{b=\overline{1,n}}$ T_pM-ben egy bázis. Belátható, hogy:

$$\langle E^{\underline{a}}, E_{\underline{b}} \rangle := E^{\underline{a}}(E_{\underline{b}}) := \delta^a_b$$

relációval értelmezett n db $E^{\underline{a}}$ T_p^*M-nek bázisa. Így $\dim T_p^*M = \dim T_pM = \dim M = n$ és a két vektortér izomorf. (az izomorfizmus viszont bázisfüggő!)

$\{E_{\underline{a}}\}$ és $\{E^{\underline{b}}\}$ duális bázispárt alkot

3° $V = V^a E_{\underline{a}} \in T_pM$ és $\omega = \omega_a E^{\underline{a}} \in T_p^*M$ esetén

$$\langle \omega, V \rangle = \langle \omega_a E^{\underline{a}}, V^b E_{\underline{b}} \rangle = \omega_a V^b \delta^a_b = \omega_a V^a$$

4° bázis-csere a bázisok dualitásának megőrzésével

$$E'^{\underline{a}} = \Psi^a{}_c E^{\underline{c}} \quad ; \quad E'_{\underline{b}} = \Phi_b{}^d E_{\underline{d}}$$

$$\langle E^{\underline{a}}, E_{\underline{b}} \rangle = \delta^a_b = \langle E'^{\underline{a}}, E'_{\underline{b}} \rangle = \Psi^a{}_c \Phi_b{}^d \langle E^{\underline{c}}, E_{\underline{d}} \rangle = \Psi^a{}_c \Phi_b{}^c$$

$\to (\Psi^a{}_c)$ és $(\Phi_b{}^c)$ egymás inverzei, tehát $\Psi = (\Phi^{-1})^t$

$$\begin{pmatrix} E'_{\underline{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\underline{b}} \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} E'^{\underline{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi^{-1\,t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^{\underline{b}} \end{pmatrix}$$

$$\text{vagy} \quad \begin{pmatrix} E'^{\underline{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^{\underline{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^{-1} \end{pmatrix}$$

5° a koordináták transzformációja bázisesere esetén

$$E'^a = \Psi^a{}_b E^b$$

$$\omega = \omega_b E^b = \omega'_a E'^a = \omega'_a \Psi^a{}_b E^b \to \omega_b = \omega'_a \Psi^a{}_b \to \omega'_a = \left[(\Psi^{-1})^t\right]_a{}^b \omega_b$$

6° a koordinátabázis duálisa

jelölje $\left\{\frac{\partial}{\partial x^a}\right\}$ T_pM-beli koordinátabázis duálisát $\{T_p^*M\}$-ban $\{dx^a\}$

a példa megindokolása: 4° és 5° megjegyzés szerint új koordinátabázis bevezetésekor $\{dx^a\} \to \{dx'^a\}$ következő módon: $\boxed{dx'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} dx^b}$ és $\boxed{\omega'_a = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a}\omega_b}$

(gyakran ez a kovariáns vektor definíciója)

7° függvény differenciálja

$$V(f) = V^a \frac{\partial f}{\partial x^a} = V^a \frac{\partial f}{\partial x^b}\delta^b_a = V^a \frac{\partial f}{\partial x^b}\left\langle dx^b, \frac{\partial}{\partial x^a}\right\rangle = \langle df, V\rangle$$

$$\to \boxed{\langle df, V\rangle = V(f) = \mathcal{L}_V(f)}$$

8° vektortér és biduálisa közti természetes izomorfizmus

$V \in T_pM$; $\omega \in T_p^*M$; $w \in T_p^{**}M$ $\quad (w : T_p^*M \to \mathbb{R})$

T_pM és $T_p^{**}M$ között a következő természetes izomorfizmus létezik:

$$w(\omega) := \omega(V) \qquad (w \Leftrightarrow V)$$

a T_pM és $T_p^{**}M$ közti természetes izomorfizmus következményeként a vektorok 1-formákra ható lineáris leképezésként is felfoghatók

$$V : T_p^*M \to \mathbb{R}$$

DEFINÍCIÓ: a sokaság összes pontjainak kotangensterei alkotják a kotangensnyalábot : $T^*M = \bigcup_{p\in M} T^*_p M$

megj. 1° $\dim T^*M = 2n$, ha $\dim M = n$

2° $\{x^a, \omega_b\}_{\substack{a=\overline{1,n}\\ b=\overline{1,n}}}$ a kotangensnyaláb lokális koordinátái

□

A következőkben tekintsük $\Phi: M \to M'$ sokaság leképezés hatását az 1-formákra (sajátos esetben Φ 1 p.d.cs. eleme)

DEFINÍCIÓ: egy ω 1-forma Φ által létrehozott visszahúzottja

$$(\Phi^*\omega)(V) := \omega(\Phi_* V)$$

megj. 1° az 1-formák visszahúzottja úgy van értelmezve, hogy a vektor – 1-forma kontrakciókat megőrzi:

$$\langle \Phi^*\omega, V\rangle = \langle \omega, \Phi_* V\rangle$$

2° 1-formák előretoltjáról csak diffeomorfizmusok esetén beszélhetünk. (az előretoltat Φ^{-1} segítségével értelmezzük)

3°

M	M'
p	$\Phi(p)$
$\Phi^* f$	f
V	$\Phi_* V$
$\Phi^*\omega$	ω

példa

- Tekintsünk egy dinamikai rendszert. Az általánosított koordináták kifeszítik az u.n. konfigurációs teret. Ez egy sokaság.
  (Egy inga helyzete egyetlen koordinátával, a φ szöggel jellemezhető. $\varphi \in [0, 2\pi)$ miatt a konfigurációs tér a kör: S^1)
- A konfigurációs tér minden pontjához tartozik T_pM tangenstér. A tangenstér elemei az általánosított sebességek.

  biz. legyenek $\{q^a\}$ lokális koordináták $p \in M$ valamely nyílt környezetén. A tangenstér vektorainak komponensei koordinátabázis-csere esetén lásd. képpen transzformálódnak: $V'^a = \frac{\partial q'^a}{\partial q^b} V^b$

  Az általánosított sebességek transzformációja:

  $$q \to q' = q'(q)$$

  $$dq'^a = \frac{\partial q'^a}{\partial q^b} dq^b \longrightarrow \dot{q}'^a = \frac{\partial q'^a}{\partial q^b} \dot{q}^b$$

  tehát $\dot{q} \in T_pM$

  □

A tangensnyaláb TM neve: sebesség-fázistér

(Az inga esetében a tangensterek a körhöz húzott érintők)

- A rendszer Lagrange-függvénye segítségével értelmezhetők az általánosított impulzusok:

$$p_a := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}$$

Az általánosított impulzusok a kotangens tér elemei.

biz. koordinátabázíscsere esetén a kotangens vektorok transzformációja: $\omega'_a = \frac{\partial q^b}{\partial q'^a}\,\omega_b$

Az általánosított impulzusok transzformációja:

$$p'_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}'^a} = \frac{\partial \dot{q}^b}{\partial \dot{q}'^a}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^b} = \frac{\partial \dot{q}^b}{\partial \dot{q}'^a}\,p_b \underset{\uparrow}{=} \frac{\partial q^b}{\partial q'^a}\,p_b$$

$$\dot{q}'^a = \frac{\partial q'^a}{\partial q^b}\,\dot{q}^b$$

tehát $p_a \in T^*_p M$

□

A kotangensnyaláb T^*M neve: <u>impulzus-fázistér</u> v. <u>fázistér</u>

V. TENZOROK

Legyen $\Pi^s_r = \underbrace{T^*_pM \times \ldots \times T^*_pM}_{r \text{ drb}} \times \underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{s \text{ drb}}$ Descartes-sorzat.

Ennek elemei: $(\omega^1, \ldots, \omega^r, V_1, \ldots, V_s)$

<u>DEFINÍCIÓ</u>: $\binom{r}{s}$-típusú <u>tenzornak</u> nevezzük a $T : \Pi^s_r \to \mathbb{R}$ multilineáris leképezéseket.

<u>megj.</u> 1° a kontravariáns vektorok $\binom{1}{0}$-típusú tenzorok
az 1-formák $\binom{0}{1}$-típusú tenzorok
a skalárok tekinthetők $\binom{0}{0}$-típusú tenzornak

2° a tenzor fogalma másképpen is bevezethető.
Legyen például egy $\binom{0}{2}$-típusú g tenzor
Ekvivalens definíciók:

$$g : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R} \quad ; (V_1, V_2) \mapsto g(V_1, V_2)$$

$$g : T_pM \to T^*_pM \quad ; \underset{\text{vektor}}{V} \mapsto \underset{\text{1-forma}}{g(\,.\,, V)}$$

Tehát ha a sokaságon adva van egy valamilyen szempontból kitüntetett $\binom{0}{2}$-típusú tenzormező, ez a kontravariáns és kovariáns vektorok között egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít. Ilyen tenzornak tekinthető a <u>metrikus tenzor</u>.

□

műveletek tensorokkal

① tenzorok összeadása

$$(T+T')(\omega^{\underline{1}},\dots,\omega^{\underline{r}},V_{\underline{1}},\dots,V_{\underline{s}}):=$$
$$:=T(\omega^{\underline{1}},\dots,\omega^{\underline{r}},V_{\underline{1}},\dots,V_{\underline{s}})+T'(\omega^{\underline{1}},\dots,\omega^{\underline{r}},V_{\underline{1}},\dots,V_{\underline{s}})$$

② tenzor szorzása skalárral

$$(\alpha T)(\omega^{\underline{1}},\dots,\omega^{\underline{r}},V_{\underline{1}},\dots,V_{\underline{s}}):=\alpha\cdot T(\omega^{\underline{1}},\dots,\omega^{\underline{r}},V_{\underline{1}},\dots,V_{\underline{s}})$$

megj. ① és ② műveletekkel a p pontban értelmezett tensorok vektorteret alkotnak. Jelölje ezt a vektorteret $T^r_s(p)$

$\dim T^r_s(p) = n^{r+s}$

③ tenzorok tenzorszorzata

legyen $T\in T^r_s(p)$; $R\in T^p_q(p)$

$$(T\otimes R)(\omega^{\underline{1}},\dots,\omega^{\underline{r+p}},V_{\underline{1}},\dots,V_{\underline{s+q}}):=$$
$$:=T(\omega^{\underline{1}},\dots,\omega^{\underline{r}},V_{\underline{1}},\dots,V_{\underline{s}})\cdot R(\omega^{\underline{r+1}},\dots,\omega^{\underline{r+s}},V_{\underline{s+1}},\dots,V_{\underline{s+q}})$$

megj. ③ művelettel a p pontban értelmezett tensorok algebrát alkotnak

$T^r_s(p)$ bázisa, tensor koordinátái

$\{E_{\underline{a}_1}\otimes\dots\otimes E_{\underline{a}_r}\otimes E^{\underline{b}_1}\otimes\dots\otimes E^{\underline{b}_r}\}$ bázis

ebben a bázisban egy tensor:

$$T=T^{a_1\dots a_r}{}_{b_1\dots b_s}\,E_{\underline{a}_1}\otimes\dots\otimes E_{\underline{a}_r}\otimes E^{\underline{b}_1}\otimes\dots\otimes E^{\underline{b}_r}$$

itt $T^{a_1\dots a_r}{}_{b_1\dots b_s}=T(E^{\underline{a}_1},\dots,E^{\underline{a}_r},E_{\underline{b}_1},\dots,E_{\underline{b}_s})$ a tensor komponensei a tenzorműveletek koordinátákkal fölírva:

① $(T+T')^{a_1\ldots a_r}{}_{b_1\ldots b_s} = T^{a_1\ldots a_r}{}_{b_1\ldots b_s} + T'^{a_1\ldots a_r}{}_{b_1\ldots b_s}$

② $(\alpha T)^{a_1\ldots a_r}{}_{b_1\ldots b_s} = \alpha \cdot T^{a_1\ldots a_r}{}_{b_1\ldots b_s}$

③ $(T\otimes R)^{a_1\ldots a_{r+p}}{}_{b_1\ldots b_{s+q}} = T^{a_1\ldots a_r}{}_{b_1\ldots b_s} \cdot R^{a_{r+1}\ldots a_{r+p}}{}_{b_{s+1}\ldots b_{s+p}}$

④ tenzor <u>kontrakciója</u>: $C : T^r_s(p) \to T^{r-1}_{s-1}(p)$

$$\text{pl: } C^1_1 T^{ab}_c = T^{ab}_a \left(= \sum_{a=1}^{n} T^{ab}_a\right) \in T^1_0(p)$$

<u>tenzorkomponensek változása koordinátabázisok cseréjére</u>

$$T'^{a_1\ldots a_r}{}_{b_1\ldots b_s} = \frac{\partial x'^{a_1}}{\partial x^{c_1}} \cdots \frac{\partial x'^{a_r}}{\partial x^{c_r}} \cdot \frac{\partial x^{d_1}}{\partial x'^{b_1}} \cdots \frac{\partial x^{d_s}}{\partial x'^{b_s}} T^{c_1\ldots c_r}{}_{d_1\ldots b_s}$$

(ez gyakran a tenzor definíciójaként szerepel)

<u>szimmetrikus és antiszimmetrikus tenzorok</u>

$$T_{ab} = \frac{T_{ab}+T_{ba}}{2} + \frac{T_{ab}-T_{ba}}{2} = T_{(ab)} + T_{[ab]}$$

$S_{ab} = S_{ba} \Longleftrightarrow S_{ab} = S_{(ab)}$ szimmetrikus tenzor

$A_{ab} = -A_{ba} \Longleftrightarrow A_{ab} = A_{[ab]}$ antiszimmetrikus tenzor

általánosítható többindexes tenzorokra is:

$$\text{pl: } R^a{}_{[bcd]} = \frac{R^a{}_{bcd} + R^a{}_{cdb} + R^a{}_{dbc} - R^a{}_{cbd} - R^a{}_{bdc} - R^a{}_{dcb}}{3!}$$

$$T^{a_1\ldots a_r}{}_{(b_1\ldots b_s)} = \frac{1}{s!} \sum_{\sigma} T^{a_1\ldots a_r}{}_{\sigma(b_1)\ldots\sigma(b_s)}$$

$$T^{a_1\ldots a_r}{}_{[b_1\ldots b_s]} = \frac{1}{s!} \sum_{\sigma} (-)^{\sigma} T^{a_1\ldots a_r}{}_{\sigma(b_1)\ldots\sigma(b_s)} \qquad \text{stb}$$

□

DEFINÍCIÓ: a sokaság összes pontján értelmezett tenzorterek együttesen tenzornyalábot alkotnak. A tenzornyaláb szeletei a tenzormezők.

□

Legyen $\Phi: M \to M'$ diffeomorfizmus (sajátos esetben Φ 1.p.d.cs. eleme). Ilyenkor $\exists\, \Phi^{-1}$ és értelmezhető a tenzorok előretoltja és visszahúzottja.

DEFINÍCIÓ: egy $T \in T^r_s(p)$ tenzor Φ által létrehozott előretoltja:

$$\left(\Phi_* T\right)\left((\Phi^{-1})^*\omega^1, \ldots, (\Phi^{-1})^*\omega^r, \Phi_* V_1, \ldots, \Phi_* V_r\right)\Big|_{\Phi(p)} := T\left(\omega^1, \ldots \omega^r; V_1, \ldots V_s\right)\Big|_p$$

□

A fizikában gyakran esik szó „aktív" és „passzív" nézőpontról, amikor valamilyen változást akarunk leírni. Az eddigiekben passzív nézőpontból volt leírva a báziscsere (a bázis, a koordináták változtak; maguk a tenzorok nem) és aktív nézőpontból a diffeomorfizmusok (a tenzorok változnak). A diffeomorfizmusok passzív nézőpontból is értelmezhetőek:

legyen $\Phi: M \to M$; $\mathcal{O} \subset M$; $q \in \Phi^{-1}(\mathcal{O}) \subset M$

$\{x^a\}$ koordináták $\Phi^{-1}(\mathcal{O})$-n ; $\{y^a\}$ koordináták $\mathcal{O}$-n

legyenek $\boxed{x'^a(q) = y^a(\Phi(q))}$ új koordináták $\Phi^{-1}(\mathcal{O})$-n. Így a diffeomorfizmus $\{x^a\} \to \{x'^a\}$ koordinátacsereként is felfogható ($q \in M$ és az összes $T(q)$ változatlanul hagyásával). Habár filozófiai szempontból a két nézőpont gyökeresen különböző, gyakorlatilag mégis ekvivalensnek tekinthetők, mert $q \in \Phi^{-1}(\mathcal{O})$ $\{x'^a\}$ koordinátái megegyeznek $\Phi(q) \in \mathcal{O}$ $\{y^a\}$ koord.-ival.

□

VI. LIE DERIVÁLÁS

Annak ellenére, hogy a sokaság különböző pontjaihoz kapcsolódó tenzorterek között nincs természetes megfeleltetés, a sokaságon természetes módon (külső struktúrák bevezetése nélkül) létezik egy deriválási művelet, a Lie-deriválás

<u>DEFINÍCIÓ:</u> $\mathcal{L}_V : T^r_s(p) \to T^r_s(p)$ lineáris leképezést

$$\boxed{\mathcal{L}_V T\Big|_p = \lim_{t\to 0} \frac{T|_p - (\Phi_{*t} T)|_p}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(\Phi_{*-t} T)|_p - T|_p}{t}}$$

V integrálgörbéi menti <u>Lie-deriváltnak</u> nevezzük

(Φ_t a V vektormezőhöz tartozó lokális 1p.d.cs. eleme)

<u>megj.</u> 1° figyelemreméltó, hogy azonos pontban kiértékelt tenzorokat hasonlítunk össze

2° $\mathcal{L}_V(\alpha T + \beta T') = \alpha \mathcal{L}_V(T) + \beta \mathcal{L}_V(T')$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

3° $\mathcal{L}_V$ tudja a Leibnitz-szabályt: $\mathcal{L}_V(TR) = T \cdot \mathcal{L}_V R + R \cdot \mathcal{L}_V T$

4° $\mathcal{L}_V$ kommutál a kontrakciókkal

5° $\mathcal{L}_V T = 0 \iff \Phi_{*t} T = T$, vagyis V^a integrálgörbéi mentén T állandó

Ilyenkor azt mondjuk, hogy T <u>invariáns</u> a V vektormező által generált 1p.dcs. hatásával szemben, illetve Φ_t <u>szimmetriája</u> T-nek.

DEFINÍCIÓ: V-hez adaptált koordináta-rendszernek nevezzük azokat a koordinátarendszereket, amelyek első koordinátája: $\boxed{x^1 = t}$ (t a V vektormező integrálgörbéinek paramétere)

megj.: V-hez adaptált koordinátarendszerben: $V = \frac{\partial}{\partial x^1}$; $V^a = \delta^a_1$

ÁLLÍTÁS: V-hez adaptált koordináta-rendszerben:

$$\boxed{\mathcal{L}_V T = \frac{\partial T}{\partial x^1}}$$

biz. legyen Φ_t a V-hez tartozó lokális 1-p. d. cs. eleme

① $\left(\Phi_{-t*} f\right)(p) = \left(\Phi^{-1}_{t*} f\right)(p) = \left(\Phi^*_t f\right)(p) = f\left(\Phi_t(p)\right)$

② általában: $\left(\Phi_* T\right)\left(\Phi^{-1*}\omega^1, \dots, \Phi_* V_1, \dots\right)\Big|_{\Phi(q)} = T(\omega^1, \dots, V_1, \dots)\Big|_q$

egyszerűbb jelöléssel: $(\Phi_* T)(\Phi(q)) = T(q)$

sajátos esetben Φ_t diffeomorfizmusokra:

$$\left(\Phi_{-t*} T\right)(p) = T\left(\Phi_t(p)\right)$$

$$\left(p = \Phi_{-t}(q) \rightarrow q = \Phi^{-1}_{-t}(p) = \Phi_t(p)\right)$$

③ V-hez adaptált koordinátarendszerben:

$$\Phi_t(x^1, x^2, \dots) = (x^1 + t, x^2, \dots)$$

$$\rightarrow \mathcal{L}_V f\Big|_p = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi_{-t*} f|_p - f|_p}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x^1+t, x^2, \dots) - f(x^1, x^2, \dots)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x^1}\Big|_p$$

$$\rightarrow \mathcal{L}_V T\Big|_p = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi_{-t*} T|_p - T|_p}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{T(x^1+t, x^2, \dots) - T(x^1, x^2, \dots)}{t} = \frac{\partial T}{\partial x^1}\Big|_p$$

□

- függvény Lie-deriváltja:

V-hez adaptált koordináta-rendszerben:

$$\mathcal{L}_V f = \frac{\partial f}{\partial x^1}$$

$$V^a = \delta^a_1 \longrightarrow V(f) = V^a \frac{\partial f}{\partial x^a} = \frac{\partial f}{\partial x^1}$$

mivel két függvény egyenlősége a koordinátarendszer választásától független állítás (a függvények, általában a tenzorok koordinátarendszer hiányában is értelmezhetők):

$$\boxed{\mathcal{L}_V f = V(f)}$$

- vektor Lie-deriváltja:

V-hez adaptált koordináta-rendszerben:

$$\left.\begin{aligned} (\mathcal{L}_V W)^a &= \frac{\partial W^a}{\partial x^1} \\ V^a = \delta^a_1 \longrightarrow [V, W]^a &= V^b \frac{\partial W^a}{\partial x^b} - W^b \frac{\partial V^a}{\partial x^b} = \frac{\partial W^a}{\partial x^1} \end{aligned}\right\}$$

mivel két vektor egyenlősége a koordinátarendszer választásától független állítás:

$$\boxed{(\mathcal{L}_V W)^a = [V, W]^a \underset{\uparrow}{=} V^b \frac{\partial W^a}{\partial x^b} - W^b \frac{\partial V^a}{\partial x^b}}$$

koordinátabázisban

- 1-forma Lie-deriváltja:

$(W^a \omega_a)$ függvény. Koordinátabázisban:

$$\mathcal{L}_V (W^a \omega_a) \overset{\downarrow}{=} W^a V^b \frac{\partial \omega_a}{\partial x^b} + \omega_a V^b \frac{\partial W^a}{\partial x^b}$$

$$\mathcal{L}_V (W^a \omega_a) \underset{\uparrow}{=} (\mathcal{L}_V W)^a \omega_a + W^a (\mathcal{L}_V \omega)_a = V^b \frac{\partial W^a}{\partial x^b} \omega_a - W^b \frac{\partial V^a}{\partial x^b} \omega_a + W^a (\mathcal{L}_V \omega)_a$$

Leibniz-szabály

összehasonlítva a két kifejezést

$$\boxed{\left(\mathcal{L}_V \omega\right)_a = V^b \frac{\partial \omega_a}{\partial x^b} + \omega_b \frac{\partial V^b}{\partial x^a}}$$

• tenzor Lie-deriváltja

$$\boxed{\begin{aligned}\left(\mathcal{L}_V T\right)^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} = V^c \frac{\partial T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s}}{\partial x^c} - T^{c \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} \cdot \frac{\partial V^{a_1}}{\partial x^c} - \dots - T^{a_1 \dots c}_{b_1 \dots b_s} \cdot \frac{\partial V^{a_r}}{\partial x^c} + \\ + T^{a_1 \dots a_r}_{c \dots b_s} \cdot \frac{\partial V^c}{\partial x^{b_1}} + \dots + T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots c} \cdot \frac{\partial V^c}{\partial x^{b_s}}\end{aligned}}$$

megj. a jelölések következőképpen szoktak egyszerűsíteni:

$$\frac{\partial}{\partial x^c} = \partial_c$$

$$\left(\mathcal{L}_V T\right)^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} = \mathcal{L}_V T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} \quad \left(\neq \mathcal{L}_V \left(T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s}\right) \; ! \right)$$

□

ÁLLÍTÁS: $\left[\mathcal{L}_X , \mathcal{L}_Y\right] T = \mathcal{L}_{[X,Y]} T$

biz. 1° $\left[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y\right] f = \left(\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X\right) f = \mathcal{L}_X \left(Y^a \partial_a f\right) - \mathcal{L}_Y \left(X^a \partial_a f\right) =$

$$= X^b \partial_b \left(Y^a \partial_a f\right) - Y^b \partial_b \left(X^a \partial_a f\right) =$$

$$= X^b \partial_b Y^a \cdot \partial_a f + \cancel{X^b Y^a \partial_b \partial_a f} - Y^b \partial_b X^a \partial_a f - Y^b \cancel{X^a \partial_b \partial_a} f =$$

$$= \left(X^b \partial_b Y^a - Y^b \partial_b X^a\right) \partial_a f = \mathcal{L}_X Y^a \cdot \partial_a f = \mathcal{L}_{\mathcal{L}_X Y} f = \mathcal{L}_{[X,Y]} f$$

2° $\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y Z^a = \mathcal{L}_X \left(Y^b \partial_b Z^a - Z^b \partial_b Y^a\right) =$

$$= X^c \partial_c \left(Y^b \partial_b Z^a - Z^b \partial_b Y^a\right) - \left(Y^b \partial_b Z^c - Z^b \partial_b Y^c\right) \partial_c X^a =$$

$$= X^c Y^b \cdot \partial_c \partial_b Z^a + X^c \partial_c Y^b \cdot \partial_b Z^a -$$

$$- X^c \cdot \partial_c Z^b \cdot \partial_b Y^a - X^c Z^b \partial_c \partial_b Y^a -$$

$$- Y^b \cdot \partial_b Z^c \cdot \partial_c X^a + Z^b \cdot \partial_b Y^c \cdot \partial_c X^a =$$

$$= X^c Y^b \partial_c \partial_b Z^a - (X^c \partial_b Y^a + Y^c \partial_b X^a) \cdot \partial_c Z^b +$$
$$+ X^c \partial_c Y^b \cdot \partial_b Z^a + Z^b (\partial_b Y^c \cdot \partial_c X^a - X^c \cdot \partial_b \partial_c Y^a)$$

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] Z^a = (X^c \partial_c Y^b - Y^c \partial_c X^b)\, \partial_b Z^a +$$
$$+ Z^b (\partial_b Y^c \cdot \partial_c X^a - X^c \cdot \partial_b \partial_c Y^a - \partial_b X^c \cdot \partial_c Y^a + Y^c \cdot \partial_b \partial_c X^a) =$$
$$= \mathcal{L}_X Y^b \cdot \partial_b Z^a - Z^b \partial_b (X^c \cdot \partial_c Y^a - Y^c \partial_c X^a) =$$
$$= (\mathcal{L}_X Y)^b \cdot \partial_b Z^a - Z^b \partial_b (\mathcal{L}_X Y)^a = \mathcal{L}_{\mathcal{L}_X Y} Z^a = \mathcal{L}_{[X,Y]} Z^a$$

3° miután az állítás bizonyítást nyert függvényekre és vektorokra, a Leibnitz-szabály segítségével tetszőleges tenzorra is általánosítható:

legyen T, R két tenzor, amelyekre az állítás bizonyított:

$$\mathcal{L}_{[X,Y]} T = (\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X) T \quad \text{és} \quad \mathcal{L}_{[X,Y]} R = (\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X) R$$

a Leibnitz-szabály értelmében:

$$\mathcal{L}_{[X,Y]}(TR) = T(\mathcal{L}_{[X,Y]} R) + R(\mathcal{L}_{[X,Y]} T)$$
$$\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y (TR) = \mathcal{L}_X (T \cdot \mathcal{L}_Y R + R \cdot \mathcal{L}_Y T) =$$
$$= \mathcal{L}_X T \cdot \mathcal{L}_Y R + T \cdot \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y R + \mathcal{L}_X R \cdot \mathcal{L}_Y T + R \cdot \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y T$$
$$(\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X)(TR) = T \cdot (\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X) R + R \cdot (\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X) T$$

$$\longrightarrow \mathcal{L}_{[X,Y]}(TR) = (\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X)(TR)$$

$\square$

a Lie-derivált mint a parciális derivált általánosítása

Láttuk, hogy V-hez adaptált koordinátarendszerben a Lie-derivált:

$$\mathcal{L}_V T = \frac{\partial T}{\partial x^1}$$

tehát a Lie-derivált bizonyos értelemben a parciális derivált általánosításának tekinthető.

A parciális derivált általánosítására azért van szükség, mert

$$\partial_1 T^{a_1 \ldots a_r}_{b_1 \ldots b_s} = \lim_{t \to 0} \frac{T^{a_1 \ldots a_r}_{b_1 \ldots b_s}(x^1+t, x^2, \ldots) - T^{a_1 \ldots a_r}_{b_1 \ldots b_s}(x^1, x^2, \ldots)}{t}$$

parciális derivált nem tenzor, mivel a különbségben szereplő két tenzor különböző tangensterekből való.

Ezzel szemben a Lie-derivált azonos pontban értelmezett tenzorok különbségét tartalmazza, tehát tenzor.

Sajnos a $(\Phi_{*t} T)|_p$ tenzor, így $(\mathcal{L}_V T)|_p$ Lie-derivált is függ az integrálgörbéktől, tehát a V vektormező p-től különböző pontbeli V vektoraitól is.

A parciális deriváltat valóban minden szempontból helyettesítő deriváltat, az u.n. <u>kovariáns deriváltat</u> csak egy extra struktúra, a <u>konnekció</u> bevezetésével értelmezhetjük. Mivel a sokaságon nem értelmezhető természetes módon egyetlen konnekció sem, megválasztásában nagyfokú szabadsággal rendelkezünk.

Ha viszont bevezetünk egy másik extra struktúrát, a <u>metrikát</u>, a kovariáns deriváltak között mindig van egy u.n. <u>metrikával kompatibilis konnekció</u>, és ez egyértelmű.

VII. DIFFERENCIÁLFORMÁK

DEFINÍCIÓ: Differenciál k-formának nevezünk egy teljesen antiszimmetrikus $\binom{0}{k}$-típusú tenzort: $\Omega \in T^0_k M$,

$$\Omega_{a_1 \dots a_k} = \Omega_{[a_1 \dots a_k]}$$

megj.: 1° a függvények diff. 0-formák
az 1-formák diff. 1-formák

2° $k > n$; $n = \dim TM$ esetén a diff. k-formák azonosan nullák

3° a $p \in M$ pontban értelmezett diff. k-formák vektorteret alkotnak: $\Lambda^k_p M$ $\quad (\Lambda^1_p M = T^*_p M)$

4° $\Lambda^k M = \bigcup_{p \in M} \Lambda^k_p M$

DEFINÍCIÓ: Differenciálformák Cartan-féle ékszorzata (külső szorzata):

$$\wedge : \Lambda^k M \times \Lambda^l M \longrightarrow \Lambda^{k+l} M$$

$$(\Omega \wedge \Pi)_{a_1 \dots a_k b_1 \dots b_l} = \Omega_{[a_1 \dots a_k} \Pi_{b_1 \dots b_l]}$$

megj.: 1° a külső szorzat nem kommutatív:

$$\Omega \wedge \Pi = (-1)^{k \cdot l}\, \Pi \wedge \Omega$$

2° a külső szorzat segítségével $\Lambda^1_p M = T^*_p M$ bázisából létrehozhatjuk $\Lambda^k_p M$-nek egy bázisát:

$$\{ E^{\underline{a_1}} \wedge \dots \wedge E^{\underline{a_k}} \}$$

pl: $\left.\begin{array}{l} k = 2 \\ \text{koordinátabázis} \end{array}\right] \rightarrow dx \wedge dy = \frac{1}{2}(dx \otimes dy - dy \otimes dx)$

bázisoszere esetén:

$$dx'\wedge dy' = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y} - \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial x}\right) dx\wedge dy = \mathcal{J}\cdot dx\wedge dy$$

$\longrightarrow dx\wedge dy$ infinitezimális felületelemként tekinthető

3° $\Lambda_p M = \bigoplus_k \Lambda_p^k M$ a $\wedge$ külső szorzattal alkotja az u.n. <u>Grassmann-algebrát</u>

□

<u>ÁLLÍTÁS:</u> $\dim \Lambda_p^k M = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

<u>biz.</u> $\dim M = n$ esetén Λ_p^k-ban a bázisvektorok száma pontosan C_n^k

○

<u>megj.</u> 1° $\Lambda^0 M = \{f\}$ $\qquad \dim \Lambda_p^0 M = 1$

$\Lambda^1 M = \{f_i\, dx^i\}$ $\qquad \dim \Lambda_p^1 M = n$

$\Lambda^2 M = \{f_{ij}\, dx^i\wedge dx^j\}$ $\qquad \dim \Lambda_p^2 M = \frac{n(n-1)}{2}$

$\Lambda^3 M = \{f_{ijk}\, dx^i\wedge dx^j\wedge dx^k\}$ $\qquad \dim \Lambda_p^3 M = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$

. . . .

$\Lambda^{n-1} M = \{f_{i_1\ldots i_{n-1}}\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{n-1}}\}$ $\qquad \dim \Lambda_p^{n-1} M = n$

$\Lambda^{n} M = \{f_{i_1\ldots i_n}\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_n}\}$ $\qquad \dim \Lambda_p^{n} M = 1$

$k>n$: $\Lambda^k M = \{0\}$ $\qquad \dim \Lambda_p^k M = 0$

2° mivel $\dim \Lambda_p^k M = \dim \Lambda_p^{n-k} M$, a két vektortér izomorf, ilyen értelemben egymás <u>duálisai</u>

! A következőkben a bázis különböző elemeinek indexeit nem húzzuk alá!

DEFINÍCIÓ: differenciál k-forma külső deriváltja:

$$d : \Lambda^k M \to \Lambda^{k+1} M$$

$$\Omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \to d\Omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \partial_j \Omega_{i_1 \dots i_k} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

$$d\Omega_{i_1 \dots i_n} = \partial_j \Omega_{i_1 \dots i_n} dx^j$$

megj. $k=0$: $df = \partial_j f \cdot dx^j$ -t az 1-formáknál már értelmeztük:

$$\langle df, V \rangle = V(f) = \mathcal{L}_V f$$

DEFINÍCIÓ: zártnak nevezünk egy diff. formát, ha $d\Omega = 0$

egzaktnak nevezünk egy Ω diff. k-formát, ha $\exists$ olyan ω diff. (k-1)-forma, hogy $\Omega = d\omega$

ÁLLÍTÁS: 1° $dd\omega = 0$

2° minden egzakt diff. forma zárt

(Poincaré lemma)

biz. $\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$

$$d\omega = \partial_j \omega_{i_1 \dots i_k} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

$$dd\omega = \partial_l \partial_j \omega_{i_1 \dots i_k} dx^l \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} =$$

$$= \partial_{[l} \partial_j \omega_{i_1 \dots i_k]} dx^l \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \underset{\uparrow}{=} 0$$

$$\partial_l \partial_j = \partial_j \partial_l$$

megj. az állítás fordítottja csak lokálisan igaz.

Vagyis minden Ω zárt formához ($d\Omega = 0$) lokálisan található ω u.h. $\Omega = d\omega$

differenciálformák és külső deriváltjaik $\dim M = 3$ esetén

$k=0$ $\quad \alpha_0 = f(x)$

$k=1$ $\quad \alpha_1 = v_1(x)\,dx^1 + v_2(x)\,dx^2 + v_3(x)\,dx^3$

$k=2$ $\quad \alpha_2 = \omega_{12}(x)\,dx^1\wedge dx^2 + \omega_{23}(x)\,dx^2\wedge dx^3 + \omega_{31}(x)\,dx^3\wedge dx^1 =$

$$= w_3(x)\,dx^1\wedge dx^2 + w_1(x)\,dx^2\wedge dx^3 + w_2(x)\,dx^3\wedge dx^1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & -\omega_{31} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad w_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\omega_{jk}$$

$k=3$ $\quad \alpha_3 = \Omega_{123}(x)\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3 = \Phi(x)\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$

ekkor:

- $\alpha_1\wedge\alpha_2 = (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3 = (\vec{v}\cdot\vec{w})\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$
- $df = \partial_i f\,dx^i = \operatorname{grad} f\cdot \vec{dx}$
- $d\alpha_1 = \partial_i v_j\,dx^i\wedge dx^j = \partial_{[i} v_{j]}\,dx^i\wedge dx^j = \frac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{jm}\delta_{in})\,\partial_{[m} v_{n]}\,dx^i\wedge dx^j =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{mnk}\cdot\partial_{[m} v_{n]}\,dx^i\wedge dx^j = (\varepsilon_{mnk}\,\partial_m v_n)\cdot\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,dx^i\wedge dx^j =$$

$$= (\operatorname{rot}\vec{v})_k\cdot\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,dx^i\wedge dx^j$$

- $d\alpha_2 = (\partial_1 w_1 + \partial_2 w_2 + \partial_3 w_3)\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3 = \operatorname{div}\vec{w}\cdot dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$
- $ddf = 0 \longrightarrow \operatorname{rot}\operatorname{grad} = 0$
- $dd\alpha_1 = 0 \longrightarrow \operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$

Háromdimenziós vektoroperátorok diff. geometriai értelmezése

E 3-dim euklideszi sokaság

$f: E \to \mathbb{R}$ függvény

$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in TE$ vektor

$\alpha = \alpha_i \, dx^i \in T^*E$ 1-forma

$F = F_{ij} \, dx^i \wedge dx^j \in T^*E \otimes T^*E$ 2-forma

- Poincaré duális „ $*$ " pl. $T^*E \otimes T^*E \to TE$; $*F = \varepsilon^{ijk} F_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} = \varepsilon_{ijk} F^{ij} dx^k$

- $\operatorname{grad} f = df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$

$\operatorname{rot} X = *dX = *d\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = *d\left(X_i \, dx^i\right) = *\left(\partial_j X_i \, dx^j \wedge dx^i\right) =$

$= \varepsilon^{kji} \partial_j X_i \frac{\partial}{\partial x^k} = \varepsilon_{ijk} \partial^j X^k dx^k$

$\operatorname{div} X = *d*X = *d*\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = *d\left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} X^i dx^j \wedge dx^k\right) =$

$= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} *\left(\partial_\ell X^i \, dx^\ell \wedge dx^j \wedge dx^k\right) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{\ell jk} \partial_\ell X^i = \frac{1}{2} \varepsilon_{jki} \varepsilon^{jk\ell} \partial_\ell X^i =$

$= \frac{1}{2}\left(\delta_k^k \delta_i^\ell - \delta_k^\ell \delta_i^k\right) \partial_\ell X^i = \frac{1}{2} \cdot 2 \delta_i^\ell \partial_\ell X^i = \partial_i X^i$

- $ddf = 0 \to 0 = *ddf = *d(\operatorname{grad} f) = \operatorname{rot} \operatorname{grad} f$

$ddX = 0 \to 0 = *ddX = (*d*)*dX = \operatorname{div} \operatorname{rot} X$

$** = \mathrm{Id}$

DEFINÍCIÓ 1° differenciálforma Lie-deriváltja meghatározott, mert a differenciálforma is tenzor: $\mathcal{L}_V \Omega|_p = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi_{-t}\Omega|_p - \Omega|_p}{t}$

2° differenciálforma belső szorzata vektorral:

$$\iota_V : \Lambda^k M \to \Lambda^{k-1} M$$

$$\iota_V \Omega = k \cdot V^{i_1} \Omega_{[i_1 \dots i_k]} \cdot dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

$$(\iota_V \Omega)(Y_1, \dots, Y_{k-1}) = k\, \Omega(V, Y_1, \dots, Y_{k-1})$$

megj. $k=0$ esetén $\iota_V f = 0$

$k=1$ esetén $\iota_V \omega = V^i \omega_i = \langle \omega, V \rangle$

DEFINÍCIÓ: egy differenciálforma nemdegenerált ha $(\iota_V \Omega = 0 \longrightarrow V = 0)$

ÁLLÍTÁS: 1° $\mathcal{L}_V(\Omega \wedge \Pi) = \mathcal{L}_V \Omega \wedge \Pi + \Omega \wedge \mathcal{L}_V \Pi$

2° $\mathcal{L}_V d\Omega = d\mathcal{L}_V \Omega$

3° $\iota_V \iota_V \Omega = 0$

4° $\iota_{fV} \Omega = f \cdot \iota_V \Omega$

5° $\iota_V(\Omega \wedge \Pi) = \iota_V \Omega \wedge \Pi + (-1)^k \Omega \wedge \iota_V \Pi$

6° $\mathcal{L}_V \iota_V \Omega = \iota_V \mathcal{L}_V \Omega$

7° $\mathcal{L}_V \Omega = d\iota_V \Omega + \iota_V d\Omega$

8° $\mathcal{L}_{fV} \Omega = f \mathcal{L}_V \Omega + df \wedge \iota_V \Omega$

9° $\iota_{[V,W]} \Omega = \mathcal{L}_V(\iota_W \Omega) - \iota_W(\mathcal{L}_V \Omega)$

biz. a műveletek definícióit kell alkalmazni

□

VIII. SZIMPLEKTIKUS SOKASÁGOK

DEFINÍCIÓ: (M,Ω) szimplektikus sokaság, ha M C^∞ sokaság és Ω zárt, nemdegenerált 2-forma M-en
(azaz $d\Omega=0$ és $i_X\Omega=0 \to X=0$)

megj.: 1° $\Omega=\Omega_{ij}\,dx^i\wedge dx^j$, $\dim M=n<\infty$
Alternatív definíciók:
a) $\Omega: TM\to T^*M$; $\Omega: V\to\Omega(V,.)=\frac{1}{2}i_V\Omega$
(M,Ω) szimplektikus sokaság, ha Ω izomorfizmus.
b) (M,Ω) szimplektikus sokaság, ha Ω_{ij} mátrixnak $\exists$ Ω^{ij} inverze, azaz $\det(\Omega_{ij})\neq 0$

2° $d\Omega=0 \to$ lokálisan létezik a szimplektikus potenciálnak nevezett 1-forma u.h. $\Omega=d\omega$

ÁLLÍTÁS: a szimplektikus sokaságok páros dimenziósak

biz.
$$\det\Omega=\sum_\sigma(-)^\sigma\Omega_{1\sigma(1)}\dots\Omega_{n\sigma(n)}\underset{\Omega_{ij}=-\Omega_{ji}}{=}(-)^n\sum_\sigma(-)^\sigma\Omega_{\sigma(1)1}\dots\Omega_{\sigma(n)n}$$
$$\|$$
$$\det\Omega^t=\sum_\sigma(-)^\sigma\Omega_{\sigma(1)1}\dots\Omega_{\sigma(n)n}$$
$$\to(-)^n=1\to n=2k$$

□

ÁLLÍTÁS: Ω akkor és csakis akkor invariáns egy V vektormező által generált 1 p.d.cs hatására szemben, ha $\iota_V \Omega$ zárt

biz. $d(\iota_V \Omega) = \mathcal{L}_V \Omega - \iota_V d\Omega = \mathcal{L}_V \Omega$

$d(\iota_V \Omega) = 0 \iff \mathcal{L}_V \Omega = 0$

□

DEFINÍCIÓ: 1° V lokális hamiltoni vektormező, ha $\iota_V \Omega$ zárt

2° V globális hamiltoni vektormező, ha $\iota_V \Omega$ egzakt

3° a lokális hamiltoni vektormezők által generált diffeomorfizmusokat kanonikus transzformációknak nevezzük.

ÁLLÍTÁS: $\forall\, f: M \to \mathbb{R}$ C^∞ függvényhez egyértelműen létezik olyan V_f vektormező, hogy $\iota_{V_f} \Omega + df = 0$

biz. létezés: $V_f^{\,i} = -\frac{1}{2}\partial_j f \cdot \Omega^{ji}$

$\Omega = \Omega_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$

$\iota_{V_f} \Omega = 2 V_f^i \Omega_{ij}\, dx^j = -\partial_k f \underbrace{\Omega^{ki} \Omega_{ij}}_{\delta_j^k} dx^j = -\partial_j f\, dx^j = -df$

egyértelműség

feltételezzük, h. V_f és W_f ugyanahhoz az f-hez tartozik:

$\iota_{V_f} \Omega = -df = \iota_{W_f} \Omega \longrightarrow \iota_{(V_f - W_f)} \Omega = 0 \longrightarrow V_f - W_f = 0$

Ω nemdegenerált

megj: V_f globális hamiltoni vektormező

biz. $\iota_{V_f} \Omega = -df \longrightarrow d\,\iota_{V_f} \Omega = -ddf = 0$

□

DEFINÍCIÓ: az f $(\iota_{V_f}\Omega + df = 0)$ függvényeket Hamilton-függvények-nek nevezzük

megj.: minden C^∞ fgvény Hamilton függvény $\dim M = n$ esetén

DEFINÍCIÓ: két (Hamilton)-függvény Poisson-zárójele:

$$\{f,g\} = 2\,\Omega(V_f, V_g) = \iota_{V_g}\iota_{V_f}\Omega$$

ÁLLÍTÁS: $\{f,g\} = \mathcal{L}_{V_f} g = -\mathcal{L}_{V_g} f \quad \left(\{f,g\} = V_f(g) = -V_g(f)\right)$

biz. $\iota_{V_g}\iota_{V_f}\Omega = -\iota_{V_g} df = d\underbrace{\iota_{V_g} f}_{-df} - \mathcal{L}_{V_g} f = -\mathcal{L}_{V_g} f = -V_g(f)$

az állítás második fele bizonyítva van.
az első fele hasonlóan bizonyítható, ha figyelembe-vesszük: $\{f,g\} = 2\,\Omega(V_f, V_g) = -2\,\Omega(V_g, V_f)$ -t

□

ÁLLÍTÁS: $V_{\{f,g\}} = [V_f, V_g]$

biz. $\iota_{[V_f,V_g]}\Omega = \mathcal{L}_{V_f}(\iota_{V_g}\Omega) - \iota_{V_g}\underbrace{\mathcal{L}_{V_f}\Omega}_{=0} = d\,\iota_{V_f}\iota_{V_g}\Omega + \iota_{V_f}\underbrace{d\,\iota_{V_g}\Omega}_{=0} =$ ← V globális ham. vektormező →

$= 2\,d\,\Omega(V_g, V_f) =$

$= -2\,d\,\Omega(V_f, V_g) =$

$= -d\,\{f,g\}$

$$\iota_{[V_f,V_g]}\Omega + d\{f,g\} = 0$$

$$\longrightarrow [V_f, V_g] = V_{\{f,g\}}$$

□

ÁLLÍTÁS: a Hamilton függvények a Poisson-zárójellel Lie-algebrát alkotnak.

Biz. $\{f,g\} = V_f(g)$ szintén függvény, továbbá:

① $\{\ ,\ \}$ bilineáris, mert Ω bilineáris

② $\{\ ,\ \}$ antiszimmetrikus, mert Ω 2-forma

③ $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} =$

$$= \frac{1}{2}\Big(\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} - \{\{f,g\},h\} - \{\{g,h\},f\} - \{\{h,f\},g\}\Big) =$$

$$= V_f\,\Omega(V_g,V_h) + V_g\,\Omega(V_h,V_f) + V_h\,\Omega(V_f,V_g) - \Omega(V_{\{f,g\}},V_h) - \Omega(V_{\{g,h\}},V_f) - \Omega(V_{\{h,f\}},V_g) =$$

$$= V_f\,\Omega(V_g,V_h) + V_g\,\Omega(V_h,V_f) + V_h\,\Omega(V_f,V_g) - \Omega([V_f,V_g],V_h) - \Omega([V_g,V_h],V_f) - \Omega([V_h,V_f],V_g)$$

$$= 3\,d\Omega(V_f,V_g,V_h) = 0$$

mert:

$$\Omega = \Omega_{ij}\,dx^i\wedge dx^j\ ,\quad d\Omega = \partial_{[k}\Omega_{ij]}\,dx^k\wedge dx^i\wedge dx^j$$

$$3\,d\Omega(X,Y,Z) = 3X^kY^iZ^j\partial_{[k}\Omega_{ij]} = X^kY^iZ^j(\partial_k\Omega_{ij} + \partial_i\Omega_{jk} + \partial_j\Omega_{ki}) =$$

$$= X^k\partial_k(Y^iZ^j\Omega_{ij}) + Y^i\partial_i(X^kZ^j\Omega_{jk}) + Z^j\partial_j(X^kY^i\Omega_{ki}) -$$

$$- \Omega_{ij}X^k\partial_k(Y^iZ^j) - \Omega_{jk}Y^i\partial_i(X^kZ^j) - \Omega_{ki}Z^j\partial_j(X^kY^i) =$$

$$= X\,\Omega(Y,Z) + Y\,\Omega(Z,X) + Z\,\Omega(X,Y) - \Omega_{ij}X^k(Y^i\underline{\partial_k}Z^j + Z^j\partial_kY^i) -$$

$$- \Omega_{jk}Y^i(X^k\underline{\partial_i}Z^j + Z^j\partial_iX^k) - \Omega_{ki}Z^j(X^k\underline{\partial_j}Y^i + Y^i\underline{\partial_j}X^k)$$

$$3\,d\Omega(X,Y,Z) - X\,\Omega(Y,Z) - Y\,\Omega(Z,X) - Z\,\Omega(X,Y) =$$

$$= -\Omega_{ij}Y^i(X^k\partial_kZ^j - Z^k\partial_kX^j) - \Omega_{jk}X^k(Y^i\partial_iZ^j - Z^i\partial_iY^j) - \Omega_{ki}Z^i(X^j\partial_jY^k - Y^j\partial_jX^k) =$$

$$= -\Omega_{ij}Y^i(\mathcal{L}_XZ)^j - \Omega_{jk}X^k(\mathcal{L}_YZ)^j - \Omega_{ki}Z^i(\mathcal{L}_XY)^k =$$

$$= -\Omega_{ij}Y^i[X,Z]^j - \Omega_{jk}X^k[Y,Z]^j - \Omega_{ki}Z^i[X,Y]^k =$$

$$= -\Omega(Y,[X,Z]) - \Omega([Y,Z],X) - \Omega([X,Y],Z) =$$

$$= -\Omega([Z,X],Y) - \Omega([Y,Z],X) - \Omega([X,Y],Z)$$

□

Tehát a vektormezők a $[.,.]$ művelettel, a Hamilton-függvények a $\{.,.\}$ Poisson zárójellel alkotnak Lie-algebrát. A két Lie-algebra között:

$$df + \iota_{V_f}\Omega = 0 \qquad (f \to V_f)$$

homomorfizmust létesít. Ha f és $\tilde{f}$ csak egy állandóban különbözik: $\tilde{f} = f + c$, $c \in \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ $d\tilde{f} = df$

Tehát a homomorfizmus magja $\mathbb{R}$.

<u>DEFINÍCIÓ</u>: (M, Ω, H) <u>dinamikai rendszer</u>, ha (M, Ω) szimplektikus sokaság és H a dinamikai rendszer Hamilton függvénye.

<u>DEFINÍCIÓ</u>: legyen $f: M \to \mathbb{R}$ C^∞ függvény. <u>Idõderiváltja</u>:

$$\boxed{\dot{f} := \mathcal{L}_{V_H} f = \{H, f\}}$$

<u>megj.</u>: V_H-hoz adaptált koordinátarendszerben $\mathcal{L}_{V_H} f = \dfrac{\partial f}{\partial t}$ és $x^1 = t$.

ÁLLÍTÁS: szimplektikus sokaságon minden pont környezetében léteznek olyan $\{q^i, p_i\}$ lokális koordináták, melyekben

$$\boxed{\Omega = dp_i \wedge dq^i}$$

biz. pl: Woodehouse

ÁLLÍTÁS: lokális koordinátákban a Poisson-zárójel:

$$\boxed{\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}}$$

biz. ① $V_f = A^i \dfrac{\partial}{\partial q^i} + B_j \dfrac{\partial}{\partial p_j}$

$$\Omega = dp_k \wedge dq^k = \frac{1}{2}(dp_k \otimes dq^k - dq^k \otimes dp_k)$$

$$\iota_{V_f}\Omega = 2\Omega(V_f, .) = B_k dq^k - A^k dp_k$$

$$0 = \iota_{V_f}\Omega + df = \left(B_k + \frac{\partial f}{\partial q^k}\right)dq^k + \left(-A^k + \frac{\partial f}{\partial p_k}\right)dp_k$$

$$\longrightarrow \boxed{V_f = \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q^k} - \frac{\partial f}{\partial q^k}\frac{\partial}{\partial p_k}}$$

② $\{f, g\} = V_f(g) = \dfrac{\partial f}{\partial p_k}\dfrac{\partial g}{\partial q^k} - \dfrac{\partial f}{\partial q^k}\dfrac{\partial f}{\partial p_k}$

a kotangensnyaláb természetes szimplektikus struktúrája

Legyen Q egy differenciálható sokaság, $\dim Q = n$, $\{q^i\}$ koord.
A kotangensnyaláb is sokaság: $M = T^*Q$; $\dim M = 2n$, $\{q^i, p_j\}$ koordináták

ÁLLÍTÁS: $M = T^*Q$-n globálisan létezik természetes szimplektikus potenciál és forma.

Bz: ① $\pi : M = T^*Q \to Q$; $(q,p) \mapsto q$ természetes projekció

$\pi_* : TM \to TQ$

$T_{(q,p)}M \to T_qQ$; $V \mapsto \pi_*(V) \in T_qQ$

$p \in T^*Q$ 1-forma $p(\pi_*(V)) = \langle p, \pi_*(V) \rangle =$ függvény

legyen $\omega : T_{(q,p)}M \to \mathbb{R}$; $V \mapsto \omega(V) = p(\pi_*(V))$

legyen $\Omega = d\omega$

$\longrightarrow \omega = p \circ \pi_*$ globálisan létezik és $\Omega = d\omega$

② lokális koordinátákban $\left(V \in T_{(q,p)}M\right)$: $V = x^i \frac{\partial}{\partial q^i} + y_i \frac{\partial}{\partial p_j}$

$$V = x^i \frac{\partial}{\partial q^i} + y_i \frac{\partial}{\partial p^j} \ ; \quad \pi_* V = x^i \frac{\partial}{\partial q^i} \ ; \ p = p_j dq^j$$

$$\omega(V) = p(\pi_* V) = p_i x^i$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{l} \omega = p_i \, dq^i \\ \Omega = dp_i \wedge dq^i \end{array}\right.$$

megj.: a kotangensnyalábban fent módon értelmezett szimplektikus potenciál a <u>Liouville-forma</u>, a szimplektikus forma pedig a <u>kanonikus szimplektikus forma</u>

DEFINÍCIÓ: $\Phi : (M, \Omega) \to (M', \Omega')$ diffeomorfizmust **szimplektikus diffeomorfizmusnak** nevezzük, ha

$$\Omega' = \Phi_* \Omega \iff \mathcal{L}_V \Omega = 0$$

(Φ a V integrálgörbéihez tartozó diffeomorfizmus)

megj. a szimplektikus diffeomorfizmusok kanonikus hatók.

INTEGRÁLÁS SOKASÁGOKON

Levi-Civita szimbólum

DEFINÍCIÓ: $$\varepsilon_{i_1\dots i_n} = \begin{cases} 0 & \text{, ha bármely két index megegyezik} \\ 1 & \text{, ha az indexek } (1\dots n) \text{ páros permutációja} \\ -1 & \text{, ha } \qquad\qquad \text{páratlan} \end{cases}$$

megj. 1° $\varepsilon_{i_1\dots i_n} = n!\,\delta^1_{[i_1}\dots\delta^n_{i_n]}$

2° $\varepsilon^{i_1\dots i_n}$ ugyanazt jelöli, mint $\varepsilon_{i_1\dots i_n}$

(tehát $\varepsilon^{i_1\dots i_n} \neq g^{i_1j_1}\dots g^{i_nj_n}\varepsilon_{j_1\dots j_n}$!)

3° $\boxed{\varepsilon_{i_1\dots i_n}\varepsilon^{i_1\dots i_n} = n!}$

biz. $(1\dots n)$ bármely $(i_1\dots i_n)$ permutációja esetén $1\cdot 1$ vagy $(-1)(-1)$ tag szerepel az összegben. A kérdés tehát csak az, hogy hány permutáció van. Ez pontosan $n!$.

4° Levi-Civita szimbólum és négyzetes mátrixok

legyen (a_{ij}) négyzetes mátrix.

$$\boxed{\det(a_{ij}) := \sum_\sigma (-)^\sigma a_{1\sigma(1)}\dots a_{n\sigma(n)} = \varepsilon^{i_1\dots i_n} a_{1i_1}\dots a_{ni_n}}$$

$$\boxed{a^{i_1j_1}\dots a^{i_nj_n}\varepsilon_{j_1\dots j_n} = \varepsilon^{i_1\dots i_n} a^{1j_1}\dots a^{nj_n}\varepsilon_{j_1\dots j_n}}$$

biz. a baloldal egy megpermutált sorú mátrix determinánsa. A jobboldali $\varepsilon^{i_1\dots i_n}$ pontosan a permutációk páros v. páratlan jellegét adja meg.

5° Levi-Civita szimbólum és az antiszimmetrikus tenzorok

$$\boxed{A_{i_1\ldots i_n} = A_{[i_1\ldots i_n]} = \varepsilon_{i_1\ldots i_n} A_{1\ldots n}}$$

$$\boxed{dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_n} = \varepsilon^{i_1\ldots i_n}\, dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n}$$

$$\boxed{dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n = \frac{1}{n!}\varepsilon_{i_1\ldots i_n}\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_n}}$$

6° transzformáció Jacobi-determinánsa

$x \to x'(x)$

$$J = \frac{D(x')}{D(x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \cdots \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & & \\ \vdots & & \end{vmatrix} = \varepsilon_{i_1\ldots i_n}\frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^1}\cdots\frac{\partial x'^{i_n}}{\partial x^n} =$$

$$= \varepsilon^{i_1\ldots i_n}\frac{\partial x'^1}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial x'^n}{\partial x^{i_n}} = \frac{1}{\frac{D(x)}{D(x')}}$$

a térfogatelem transzformációja:

$$dx^1 dx^2 \ldots dx^n \to dx'^1 dx'^2 \ldots dx'^n = J\, dx^1 dx^2 \ldots dx^n$$

ÁLLÍTÁS: $dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$ térfogatelemként transzformálódik

biz. $dx'^1\wedge\ldots\wedge dx'^n = \frac{\partial x'^1}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial x'^n}{\partial x^{i_n}}\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_n} \overset{5°}{=}$

$$= \frac{\partial x'^1}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial x'^n}{\partial x^{i_n}}\varepsilon^{i_1\ldots i_n}\, dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n = \frac{D(x')}{D(x)}\, dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$$

megj. $\mathcal{E} := dx^1\wedge\ldots dx^n \overset{5°,1°}{=} \frac{1}{n!}\varepsilon_{i_1\ldots i_n}\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_n}$

forma komponensei a Levi-Civita szimbólumok $\frac{1}{n!}$-szeresei.
Más bázisban hasonlóan értelmezett $\mathcal{E}'$ forma azonban

$$\mathcal{E}' := dx'^1\wedge\ldots dx'^n = \frac{D(x')}{D(x)}\, dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n = \frac{D(x')}{D(x)}\mathcal{E}$$

különbözik $\mathcal{E}$-től!
(a második bázisban $\mathcal{E}$ komponensei: $\frac{1}{n!}\frac{D(x)}{D(x')}\varepsilon_{i_1\ldots i_n}$)

Differenciál n-formák integrálása

M, $\dim M = n$, $\alpha \in \Lambda^n_p M \to \alpha = a \; dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$

DEFINÍCIÓ: 1° legyen $\sigma \subset M$ nyílt, $\Psi: \sigma \to \mathbb{R}^n$ térkép

$$\int_\sigma \alpha := \int_{\Psi(\sigma)} a \, dx^1 dx^2 \dots dx^n$$

2° ha M parakompakt, $\exists \{f_i\}$ egységpartíció és az integrálás az egész sokaságra kiterjeszthető:

$$\int_M \alpha := \sum_i \int_{\sigma_i} f_i \alpha$$

ÁLLÍTÁS: $\int_\sigma \alpha$ független az σ-n választott koordinátáktól

biz. $\alpha = \alpha_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} \overset{5°}{=} \underbrace{\alpha_{i_1 \dots i_n} \varepsilon^{i_1 \dots i_n}}_{a} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$

új rendszerben:

$\alpha = \alpha'_{i_1 \dots i_n} dx'^{i_1} \wedge \dots \wedge dx'^{i_n} = \underbrace{\alpha'_{i_1 \dots i_n} \varepsilon^{i_1 \dots i_n}}_{a'} \cdot dx'^1 \wedge \dots \wedge dx'^n$

$$a' = \varepsilon^{i_1 \dots i_n} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_n}}{\partial x'^{i_n}} \alpha_{j_1 \dots j_n} \overset{4°}{=} \underbrace{\varepsilon^{i_1 \dots i_n} \frac{\partial x^1}{\partial x'^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial x'^{i_n}}} \underbrace{\varepsilon^{j_1 \dots j_n} \alpha_{j_1 \dots j_n}} =$$

$$= \frac{D(x)}{D(x')} a$$

(ez várható volt, mert $dx'^1 \wedge \dots \wedge dx'^n = \frac{D(x')}{D(x)} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$
és α invariáns geometriai objektum)

tehát:

$$\int_\sigma \alpha = \int_{\Psi'(\sigma)} a' dx'^1 \dots dx'^n = \int_{\Psi(\sigma)} \frac{D(x)}{D(x')} a \cdot \frac{D(x')}{D(x)} dx^1 \dots dx^n = \int_{\Psi(\sigma)} a \, dx^1 \dots dx^n$$

ÁLLÍTÁS: $\int_M \alpha$ független az M-n választott atlasztól

biz. következménye az ezt megelőző állításnak

ÁLLÍTÁS: $\int_M \alpha$ független az M-n választott egységpartíciótól

ÁLLÍTÁS: $\int_M \alpha = \int_{\Phi(M)} \Phi_* \alpha$

(a diffeomorfizmusok invariánsan hagyják az integrált)

ÁLLÍTÁS: (Stokes-tétele)

Legyen M kompakt, orientálható, ∂M határral rendelkező sokaság, β pedig egy ∂M-n értelmezett differenciál (n-1) forma. ($\dim \partial M = n-1$, ha $\dim M = n$). Ekkor

$$\boxed{\int_{\partial M} \beta = \int_M d\beta}$$

<u>DEFINÍCIÓ</u>: Egy folytonos, sehol sem nulla Θ differenciál n-formát <u>térfogati formának</u> nevezünk

<u>DEFINÍCIÓ</u>: <u>függvény integrálja</u>:

$$\int_M f := \int_M f\,\Theta$$

<u>megj.</u> a sokaságstruktúra nem választ ki természetes módon egyetlen térfogati formát sem.
Ha viszont adott a sokaságon egy metrika, ez egyértelműen kiválaszt egy u.n. <u>kanonikus térfogati formát</u> (η)

<u>DEFINÍCIÓ</u>: $\eta = \sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \overset{5^\circ}{=} \sqrt{|g|}\, \frac{1}{n!}\, \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}$

$$\boxed{\eta_{i_1 \ldots i_n} = \sqrt{|g|}\, \frac{1}{n!}\, \varepsilon_{i_1 \ldots i_n}}$$

a <u>kanonikus térfogati forma</u>

<u>megj.</u> 1° $\sqrt{|g|} = |\det(g_{ab})|^{1/2}$

2° $\det(g_{ab}) = (-)^s\, |\det(g_{ab})|$
mert a metrika lokálisan diagonalizálható
(s = a mínuszok száma a signatúrában)

3° ε egy lehetséges térfogati forma

ÁLLÍTÁS: 1° $\boxed{\eta^{i_1\dots i_n} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{1}{n!}(-)^s \varepsilon^{i_1\dots i_n}}$

2° $\eta_{i_1\dots i_n}\eta^{i_1\dots i_n} = (-)^s \frac{1}{n!}$

biz. 1° $\eta^{i_1\dots i_n} = g^{i_1j_1}\dots g^{i_nj_n}\eta_{j_1\dots j_n} = g^{i_1j_1}\dots g^{i_nj_n}\varepsilon_{j_1\dots j_n}\sqrt{|g|}\cdot\frac{1}{n!} \overset{4°}{=}$

$$= \varepsilon^{i_1\dots i_n}\underbrace{g^{1j_1}\dots g^{nj_n}\varepsilon_{j_1\dots j_n}}\sqrt{|g|}\cdot\frac{1}{n!} = \varepsilon^{i_1\dots i_n}\det(g^{ab})\sqrt{|g|}\frac{1}{n!} =$$

$$= \varepsilon^{i_1\dots i_n}\frac{1}{g}\sqrt{|g|}\frac{1}{n!} = \varepsilon^{i_1\dots i_n}(-)^s\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{1}{n!}$$

2° $\eta_{i_1\dots i_n}\eta^{i_1\dots i_n} = \sqrt{|g|}\frac{1}{n!}\varepsilon_{i_1\dots i_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{|g|}}(-)^s\frac{1}{n!}\varepsilon^{i_1\dots i_n} =$

$$= \frac{1}{(n!)^2}(-)^s\underbrace{\varepsilon_{i_1\dots i_n}\varepsilon^{i_1\dots i_n}} \overset{3°}{=} (-)^s\frac{1}{n!}$$

□

ÁLLÍTÁS: η kanonikus térfogati forma alakja invariáns

biz. ① $|g|$ transzformációja

$$|g| = (-)^s\varepsilon^{i_1\dots i_n}g_{1i_1}\dots g_{ni_n}$$

$$|g'| = (-)^s\varepsilon^{i_1\dots i_n}g'_{1i_1}\dots g'_{1i_n} =$$

$$= (-)^s\underbrace{\varepsilon^{i_1\dots i_n}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{i_1}}\dots\frac{\partial x^{j_n}}{\partial x'^{i_n}}}_{\varepsilon^{i_1\dots i_n}\frac{\partial x^1}{\partial x'^{i_1}}\dots\frac{\partial x^n}{\partial x'^{i_n}}\varepsilon^{j_1\dots j_n}}\cdot\frac{\partial x^{k_1}}{\partial x'^1}\dots\frac{\partial x^{k_n}}{\partial x'^n}\cdot g_{j_1k_1}\dots g_{j_nk_n} =$$

$$= (-)^s\frac{D(x)}{D(x')}\cdot\underbrace{\varepsilon^{j_1\dots j_n}g_{j_1k_1}\dots g_{j_nk_n}}_{(-)^s\sqrt{|g|}\,n!\,\eta^{i_1\dots i_n}}\cdot\frac{\partial x^{k_1}}{\partial x'^1}\dots\frac{\partial x^{k_n}}{\partial x'^n} =$$

$$= \sqrt{|g|}\cdot\frac{D(x)}{D(x')}\,n!\,\eta_{k_1\dots k_n}\frac{\partial x^{k_1}}{\partial x'^1}\dots\frac{\partial x^{k_n}}{\partial x'^n} =$$

$$= \sqrt{|g|}\, \frac{D(x)}{D(x')}\, n! \cdot \frac{1}{n!} \sqrt{|g|}\, \varepsilon_{k_1 \dots k_n} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial x'^1} \cdots \frac{\partial x^{k_n}}{\partial x'^n} = |g| \left(\frac{D(x)}{D(x')} \right)^2$$

$$\longrightarrow \boxed{|g'| = \left(\frac{D(x)}{D(x')} \right)^2 |g|}$$

② $$\eta = |g'|^{1/2} dx'^1 \wedge \dots \wedge dx'^n = \frac{D(x)}{D(x')} |g|^{1/2} \frac{D(x')}{D(x)} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n =$$

$$= |g|^{1/2} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

□

Felhasznált irodalom

[1] Gacsályi Sándor – Bevezetés az általános topológiába, Debrecen 1972

[2] Hocking, J. G & Young, G. S. – Topology, Reading : Addison-Wesley 1961

[3] Kobayashi, S. & Nomizu, K – Foundations of Differential Geometry vol 1., New York : Interscience 1963

[4] Wald, R.M – General Relativity, Univ. of Chicago Press 1984

[5] Hawking, S.W. & Ellis, G.F.R – The Large Scale Structure of Space-Time, Cambridge Univ. Press 1973

[6] Sundermayer, K. – Constrained Dynamics, Springer 1982

[7] Eguchi, T. & Gilkey, P.B. & Hanson, A. J. – Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry, Physics Reports 66, no 6, pg 213-393, 1980

[8] Kramer, D. & all – Exact Solutions of Einstein's Field Equations, ed. Schmutzer, E., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980

[9] Szabados László – Dinamikai rendszerek kanonikus analízise témakörben tartott előadásai, ELTE 1992 április-május

[10] Woodhouse, N. – Geometric Quantization Oxford Monographs in Mathematics, 1980