Szegedi Tudományegyetem

Fizikus Tanszékcsoport

Elméleti Fizikai Tanszék

Közönséges differenciálegyenletek

Segédlet

Készítette: **Szaszkó-Bogár Viktor**

PhD hallgató

Szeged

2013

Tartalomjegyzék

Előszó

A segédletet elsősorban azon hallgatók figyelmébe ajánlom, akik az elméleti mechanika előadást és gyakorlatot hallgatják. A célom az volt, hogy dióhéjban összefoglaljam a differenciálegyenletek főbb típusait és azok megoldási fogásait. Ezeket példákon és megoldott feladatokon keresztül mutatom be. A fontosabb tételeket természetesen közlöm, de a precíz bizonyítások közlését nem tekintettem feladatomnak. Ebben a segédletben igyekszem minél több, a fizikából vett példával érzékeltetni, hogy milyen fontosak a differenciálegyenletek.

Szeged, 2013. szeptember 2.

1. fejezet

A differenciálegyenlet fogalma. A differenciálegyenletek osztályozása.

1.1. Definíció. *Függvényegyenletnek nevezzük az összes olyan egyenletet, amelyben az ismeretlen, amit keresünk egy függvény és nem egy skalár (szám).*

1.2. Példa. Vegyük a következő függvényegyenletet: $f(x)\,(f(x)-3x) = -2x^2$.
Átalakítás után $f(x)$-re egy másodfokú egyenletet kapunk

$$f^2(x) - 3x \cdot f(x) + 2x^2 = 0.$$

Behelyettesítve a megoldóképeletbe a következő két függvényt kapjuk megoldásul: $f_1(x) = x$ és $f_2(x) = 2x$.

1.3. Definíció. *Differenciálegyenletnek nevezzük az olyan függvényegyenleteket, amelyben az ismeretlen függvény és a differenciálhányados-függvényei (deriváltak) ugyanazon a helyen szerepelnek.*

1.4. Példa. $\frac{dy}{dx} - 4\sin^2(x) = 1$ vagy röviden $y' - 4\sin^2(x) = 1$. Az $y = y(x)$, azaz csak az x független változó függvénye. A probléma valójában egy integrál kiszámítására redukálódik.

$$y = \int \left(1 + 4\sin^2(x)\right) dx = \int 1dx + 4\int \sin^2(x)dx$$

$$\int 1dx = x + C_1.$$

Használjuk a $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ és $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ összefüggéseket. Kapjuk, hogy $4\sin^2(x) = 2(1-\cos(2x))$.

$$4\int \sin^2(x)dx = 2\int 1dx - 2\int \cos(2x)dx = 2(x + C_2) - (\sin(2x) + C_3).$$

A teljes megoldás:

$$y = 3x - \sin(2x) + (C_1 + C_2 - C_3).$$

Legyen $C = C_1 + C_2 - C_3$ konstans.

$$y = 3x - \sin(2x) + C.$$

Ellenőrizhetjük az eredményünket, ha differenciáljuk a kapott y függvényt.

Láthattuk, hogy a legegyszerűbb differenciálegyenletek megoldása nem más, mint egy integrálási feladat. Érdemes alapos gyakorlatot szerezni az integrálásban mielőtt differenciálegyenletekkel foglalkozunk.

1.5. Definíció. *Közönséges differenciálegyenletről akkor beszélünk, ha az ismeretlen függvény egyváltozós.*

Tökéletes az (1.4)-ben tárgyalt feladat, hiszen az y csak az x változó függvénye.

1.6. Példa. $y' + 5^x = 5x$.

$$y = \int (5x - 5^x)\, dx.$$

Az integrálás előtt írjuk át az 5^x-t a következőképpen: $5^x = e^{x\ln(5)}$.

$$y = 5\int x dx - \int e^{x\ln(5)} dx.$$

$$5\int x dx = \frac{5}{2}x^2 + C_1.$$

$$\int e^{x\ln(5)} dx = \frac{5^x}{\ln(5)} + C_2.$$

Legyen $C = C_1 - C_2$ konstans. A teljes megoldás:

$$y = \frac{5}{2}x^2 - \frac{5^x}{\ln(5)} + C.$$

Ellenőrizhetjük az eredményünket, ha differenciáljuk a kapott y függvényt.

1.7. Definíció. *Parciális differenciálegyenletnek nevezzük azokat a differenciálegyenleteket, amelyekben az ismereletlen függvény többváltozós.*

1.8. Példa. A fizikában sokszor találkozunk a **hullámegyenlettel**. Általánosan, ha egy hullám (nemcsak mechanikai) a tér minden irányába terjed (pl. gömbhullám), akkor ezen hullámok eleget tesznek a három helykoordinátától függő hullámegyenletnek:

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0.$$

A ψ a hullám terjedését leíró függvény, c pedig a hullám terjedési sebessége. Ha bevezetjük $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$, ún. Laplace-operátort, akkor a hullámegyenletet az alábbi tömörebb formába írhatjuk:

$$\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = 0.$$

Haladottabb fizikai tanulmányaink során megismerkedünk a D'Alambert vagy hullámoperátorral, mely $\square = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle$ alakú. Ezzel az operátorral a hullámegyenlet:

$$\square\psi = 0.$$

Ebben a segédletben nem foglalkozunk a parciális differenciálegyenletek megoldási módszereivel, de nem szabad elfelejtenünk, hogy rendkívül fontosak a fizikában és annak minden területén találkozhatunk velük (pl. klasszikus mechanika, termodinamika, elektrodinamika, kvantummechanika, ...).

1.9. Definíció. *Algebrainak nevezzük a differenciálegyenletet, ha abban az ismeretlen függvénynek és deriváltjainak csak polinomja szerepel.*

1.10. Definíció. *Transzcendens a differenciálegyenlet, ha abban az ismeretlen függvénynek és deriváltjainak nem csak polinomja szerepel.*

A differenciálegyenleteket különféle szempontok szerint lehet osztályozni és ennek eredményeképpen többféle jelzővel ellátni. Ezen megállapítások segítenek nekünk, hogy melyik a megfelelő megoldási módszer az adott differenciálegyenletnél. Javaslom, hogy a kitűzött probléma megoldása előtt mindenképpen fontoljuk meg, hogy a differenciálegyenlet milyen típusú.

1.11. Definíció. *A differenciálegyenlet rendje az egyenletben szereplő legmagasabb rendű derivált rendszámával egyenlő.*

1.12. Definíció. *A közönséges differenciálegyenletek közül azokat, amelyekben az ismeretlen függvény és ennek deriváltjai legfeljebb csak az első hatványon fordulnak elő és szorzatuk nem szerepel, lineáris differenciálegyenleteknek nevezik. Minden más differenciálegyenlet nemlineáris.*

1.13. Definíció. *Homogénnek nevezünk egy közönséges differenciálegyenletet, ha nem tartalmaz olyan tagokat melyekben konstans vagy a független változó szerepel. Egyébként az egyenlet inhomogén.*

1.14. Definíció. *Ha a közönséges differenciálegyenletben a függvényt és a deriváltjait tartalmazó tagok együtthatói állandók, akkor az egyenletet állandó együtthatós differenciálegyenletnek nevezzük.*

1.15. Definíció. *A nem állandó együtthatós differenciálegyenleteket függvényegyütthatós differenciálegyenleteknek nevezzük.*

1.16. Definíció. *Olyan $y' = F(y^n, \dots, y, x)$ alakú differenciálegyenleteket, melyeknek jobb oldala nem tartalmaz explicit időfüggést, azokat autonóm differenciálegyenleteknek nevezzük.*

1.17. Példa. A $\frac{(y''+x)^2}{xy-1} = 3$ egyenletet átrendezve kapjuk:

$$y''^2 + 2y''x - 3xy + x^2 + 3 = 0.$$

A differenciálegyenletünk:

- közönséges, mert a keresett y függvény egyváltozós,
- másodrendű, mert tartalmazza az y''-at,
- nem lineáris, mert van benne y''^2 másodfokú tag,
- inhomogén, van csak x-től függő tag (ez az x^2).

2. fejezet

A differenciálegyenletek megoldása. A kezdeti érték probléma. Egzisztencia és unicitás.

Ebben a fejezetben tisztázni szeretnénk, hogy mit értünk egyáltalán egy differenciálegyenlet megoldásán.

2.1. Definíció. *Mindazokat a függvényeket, amelyek a deriváltjaikkal együtt azonosan kielégítik az adott differenciálegyenletet, a differenciálegyenlet megoldásainak (integráljainak) nevezzük.*

A megoldások között megkülönböztetünk *általános* vagy *partikuláris* megoldást, valamint létezhet *reguláris* vagy *szinguláris* megoldás is.

2.2. Definíció. *Az n-ed rendű közönséges differenciálegyenlet általános megoldása az a függvény, amely pontosan n számú, tetszőleges, egymástól független állandót (paramétert) tartalmaz, és a deriváltjaival együtt azonosan kielégíti a differenciálegyenletet.*

2.3. Definíció. *Az n-ed rendű közönséges differenciálegyenlet partikuláris megoldása az a függvény, amely legfeljebb $(n-1)$ számú, tetszőleges, egymástól független állandót (paramétert) tartalmaz, és a deriváltjaival együtt azonosan kielégíti a differenciálegyenletet. Speciális esetben egyetlen paramétert sem tartalmaz.*

2.4. Példa. Vegyük a következő differenciálegyenletet: $y'' = 12x$. Ez egy közönséges, $n = 2$ rendű, lineáris és inhomogén differenciálegyenlet. Integrálással adódik a megoldás,

$$y' = 6x^2 + A,$$

majd ezután még egy integrálással kapjuk a differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y = 2x^3 + Ax + B.$$

Valóban $n = 2$ számú paramétert tartalmaz az általános megoldás, A-t és B-t. Ha például $A = -1$ és $B = 4$ választással élünk, akkor az egyenlet egy partikuláris megoldását kapjuk:

$$y = 2x^3 - x + 4.$$

Mivel az A , B paraméterek értékét végtelen sok féle módon megválaszthatjuk, azért végtelen sok partikuláris megoldás létezik.

2.5. Definíció. *Az n-ed rendű közönséges differenciálegyenlet valamely partikuláris megoldását kiválaszthatjuk úgy is, hogy megadunk legfeljebb n számú, összetartozó x és y értéket (pontot), amit a partikuláris megoldásnak ki kell elégítenie. Ezek a kerületi vagy határfeltételek.*

2.6. Példa. Az előző példánkba írjuk elő, hogy a megoldás haladjon át a $P_1(x_1 = 1; y_1 = -2)$ és a $P_2(x_2 = 3; y_2 = 2)$ pontokon, azaz a következő lineáris egyenletrendszert kapjuk:

$$-2 = 2 + A + B$$

$$2 = 54 + 3A + B.$$

Ezzel a határfeltétellel $A = -24$ és $B = 20$. A partikuláris megoldás: $y = 2x^3 - 24x + 20$.

2.7. Definíció. *Egy n-ed rendű közönséges differenciálegyenlet esetében meg lehet adni a független változó egy adott értékéhez tartozó függvényértéket, az első, második,…, $(n-1)$-edik derivált értékét. Ezek a kezdeti feltételek.*

2.8. Példa. Az előző példánkat vegyük elő ismét. A kezdeti feltételek a következők: $x_0 = 1$, $y(x_0) = 1$ és $y'(x_0) = 2$.

$$y'(x_0) = 6x_0^2 + A = 2,$$

$$y(x_0) = 2x_0^3 + Ax_0 + B = 1.$$

Behelyettesítve a kezdeti feltételeket kapjuk: $A = -4$ és $B = 3$. Ezekkel a kezdeti feltételekkel tehát a partikuláris megoldás: $y = 2x^3 - 4x + 3$.

2.9. Definíció. *Vegyük az $y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ n-ed rendű, közönséges differenciálegyenletet, valamint vesszük az $\mathbf{y}(x_0), \mathbf{y_0} \in \mathbb{R}^n$ vektorokat, melyek*

$$\mathbf{y}(x_0) = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \\ y''(x_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \text{ és } \mathbf{y_0} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \\ y_0'' \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Ekkor kezdeti érték problémának (röviden K.É.P.) nevezzük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y_0} \end{cases}$$

Az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y_0}$ a kezdeti érték feltétel.

2.10. Példa. Adott a következő K.É.P.:

$$\begin{cases} y^{(2)} = y'' = e^{-4x} \\ x_0 = 0 \\ y(x_0) = 4 \\ y'(x_0) = -5 \end{cases}$$

Azaz $\mathbf{y}(x_0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$. Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását. Integráljuk az egyenletet:

$$y' = \int e^{-4x} dx = -\frac{1}{4}\left(e^{-4x} + A\right),$$

$$y = -\frac{1}{4}\int \left(e^{-4x} + A\right) dx = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}e^{-4x} + Ax + B\right)$$

Most adjuk meg a két paraméter értékét. Ne feledkezzünk el a kezdeti feltételekről:

$$y'(x_0 = 0) = -\frac{1}{4}\left(e^{-4x_0} + A\right) = -5,$$

$$y(x_0 = 0) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}e^{-4x_0} + Ax_0 + B\right) = 4.$$

Tehát az alábbi lineáris egyenletrendszert kaptuk:

$$-\frac{1}{4}\left(1 + A\right) = -5,$$

$$-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4} + B\right) = 4.$$

A paraméterek értékei: $A = 19$ és $B = -\frac{63}{4}$.
A partikuláris megoldás: $y = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}e^{-4x} + 19x + -\frac{63}{4}\right)$.

Kiemelkedő fontosságú a differenciálegyenletek elméletében, hogy mit tudunk mondani a kezdeti érétk probléma megoldásáról. Nevezetesen, mit tudunk állítani a megoldás létezéséről és egyértelműségéről. Erre a kérdésre az egzisztencia és unicitás tétel ad választ. Ennél a pontnál hangsúlyoznunk kell, hogy a differenciálegyenletek elmélete sokkal mélyebb annál, mint amivel ez a segédlet foglalkozik. A következő tételt is megfogalmazhatjuk sokféleképpen attól függően, hogy milyen differenciálegyenletekről, illetve differenciálegyenlet-rendszerekről van szó. Az elméleti mechanika előadáson a dinamikai rendszerek kapcsán mondjuk ki ezt a tételt.

2.11. Tétel. *Egzisztencia és unicitás tétel*
Tegyük fel, hogy mind az F mind a $\frac{\partial F}{\partial y}$ folytonos függvények egy olyan $\alpha < x < \beta$, $\gamma <$ $< y < \delta$ téglalapon, amely tartalmazza az $(x_0; y_0)$ pontot. Akkor van olyan $(x_0 - h; x_0 + h) \subset (\alpha; \beta)$, amelyben a következő kezdeti érték probléma megoldása létezik és egyértelmű:

$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

2.12. Definíció. *Az egzisztncia és unicitás tétel kimondja, hogy a kezdeti érétk problémának létezik megoldása és az egyértelmű. Ezt a megoldást nevezzük a differenciálegyenlet reguláris megoldásának.*

2.13. Példa. A (2.10) példában a differenciálegyenlet reguláris megoldása:

$$y = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}e^{-4x} + 19x + -\frac{63}{4}\right).$$

2.14. Definíció. *A differenciálegyenlet olyan megoldását, amely egyik pontjában sem tesz eleget az unicitás feltételének, szinguláris megoldásnak nevezzük.*

Differenciálegyenlet szinguláris megoldására a következő fejezetben adunk példát.

3. fejezet

Elsőrendű, az y'-ben elsőfokú differenciálegyenletek.

Az elsőrendű, y'-ben elsőfokú differenciálegyenletek általános alakja:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

ahol $M(x,y)$ és $N(x,y)$ a sík valamilyen adott T tartományában értelmezett folytonos függvények. Az $M(x,y)$ és $N(x,y)$ függvények típusától függően a differenciálegyenlet megoldása más-más módszerekkel történik. A következő alfejezetekben az elsőrendű differenciálegyenletek néhány típsát és ezek megoldási módszereit mutatjuk be.

3.1. Explicit alakú, elsőrendű differenciálegyenletek. Iránymező.

3.1. Definíció. *Ha az*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

általános alakú, elsőrendű differenciálegyenlet rendezéssel

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

vagy

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

alakra hozható, explicit alakú, elsőrendű differenciálegyenletről beszélhetünk.

Az elsőrendű differenciálegyenleteknek érdekes geometriai tartalom tulajdonítható. Egy

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

explicit alakú differenciálegyenlet az (x,y) pontok azon T tartományában, amelyben az egyenletnek van megoldása, minden (x_0,y_0) ponthoz egy irányt határoz meg. Ez az

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_0,y_0)} = f(x_0,y_0)$$

irányhatározó, ahhoz az integrálgörbéhez húzható érintőnek a meredeksége, amely áthalad az (x_0, y_0) ponton.

3.2. Definíció. *A T tartomány minden pontjához rendelt irányok összességét iránymezőnek nevezzük.*

Most térjünk vissza a fentebb már említett explicit alakú differenciálegyenleinkre. A $\frac{dy}{dx} = f(x)$ alakú differenciálegyenlet megoldása közvetlenül integrálással kapható meg

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

3.3. Példa. Adjuk meg az $y' + y'x = 3$ differenciálegyenletnek azt a partikuláris megoldását, mely áthalad a $P_0(x_0 = 0; y_0 = 1)$ ponton (ez a határfeltétel).
Először rendezzük át az egyenletünket úgy, hogy a már ismertetett $\frac{dy}{dx} = f(x)$ alakot kapjuk:

$$y' = \frac{3}{x+1}.$$

Integrálva

$$y = 3\int \frac{1}{x+1}dx = 3\ln|x+1| + \ln C.$$

A paramétert célszerűen $\ln C$ alakban vettük fel. Tehát az általános megoldás:

$$y = \ln C\,|x+1|^3\,.$$

A határfeltétel miatt a C értéke:

$$y_0 = \ln C\,|x_0+1|^3\,,$$

$$1 = \ln C,$$

$$C = e.$$

Tehát az adott határfeltételhez tartozó partikuláris megoldás:

$$y = \ln e\,|x+1|^3 = \ln|x+1|^3 + 1.$$

Emlékezetjük az olvasót, hogy az (1.4.) és (1.6.) példákban is ilyen explicit alakú, elsőrendű differenciálegyenleteket oldottunk meg.

A $\frac{dy}{dx} = g(y)$ alakú differenciálegyenlet megoldása az összetett függvény integrálási szabálya alapján kapható meg $(g(y) \neq 0)$. Először idézzünk fel egy tételt.

3.4. Tétel. *A $g(y(x))$ összetett függvényre igaz: $\int g(y(x)) \cdot y'dx = G(y(x)) + C$. Ekkor léteznie kell a g külső függvény G primitív függvényének.*

Tehát szemelőtt tartva az összetett függvény integrálási szabályait a következőt kapjuk a $\frac{dy}{dx} = g(y)$ differenciálegyenletek esetében:

$$x = \int \frac{dy}{g(y)} = G(y) + C.$$

3.5. Példa. Adjuk meg az $y'y^2 = 1$ differenciálegyenlet általános megoldását. Rendezzük át a differenciálegyenletet úgy, hogy az egyenlet egyik oldalán álljon a derivált:

$$y' = \frac{1}{y^2}.$$

A differenciálegyenlet explicit alakú, tehát az általános megoldás

$$x = \int y^2 dy = \frac{y^3}{3} + C.$$

Látszik, hogy y kifejezhető a fenti összefüggésből. Tehát az általános megoldás

$$y = \sqrt[3]{3(x - C)}.$$

3.6. Példa. Adjuk meg az $y' + y^2 = 1$ differenciálegyenlet általános megoldását. Rendezzük át:

$$y' = 1 - y^2.$$

A differenciálegyenlet explicit alakú, tehát az általános megoldás

$$x = \int \frac{1}{1 - y^2} dy,$$

ha $y \neq \pm$. Az integrálást parciális törtekre bontással végezzük el:

$$\frac{1}{1 - y^2} = \frac{1}{(1 + y)(1 - y)} = \frac{A}{1 + y} + \frac{B}{1 - y},$$

$$\frac{1}{(1 + y)(1 - y)} = \frac{A(1 - y) + B(1 + y)}{(1 + y)(1 - y)} = \frac{(A + B) + y(B - A)}{(1 + y)(1 - y)}.$$

Az A-ra és a B-re lineáris egyenletrendszert kaptunk:

$$A + B = 1,$$

$$B - A = 0,$$

$$A = B = \frac{1}{2}.$$

Az elvégzendő integrál

$$\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 + y} + \frac{1}{1 - y} \right) dy = \frac{1}{2}(-\ln|1 - y| + \ln|1 + y|) + \ln C = \ln C \sqrt{\left| \frac{1 + y}{1 - y} \right|}.$$

Tehát az általános megoldás, melyből az y kifejezhető

$$x = \ln C \sqrt{\left| \frac{1 + y}{1 - y} \right|},$$

$$y = \frac{Ke^{2x} - 1}{Ke^{2x} + 1},$$

ahol $K = \frac{1}{C^2}$.

3.7. Példa. Barometrikus magasságformula
A feladatunk a következő, meg kell határozni a levegő nyomását a magasság függvényében. A hallgatók talákoznak ezzel a problémával a mechanika alapkollégium keretében. Most csak arra szeretnénk rámutatni, hogy egy explicit alakú, lineáris differenciálegyenletet kell megoldani. A megoldandó kezdeti érték probléma a következő:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dz} = -\frac{\rho_0}{p_0} pg \\ p(z=0) = p_0 \end{cases},$$

ahol a p nyomás csak a z függvénye. A differenciálegyenlet megoldása

$$z = \int \frac{dp}{-\frac{\rho_0}{p_0} pg} = -\frac{p_0}{\rho_0 g} \int \frac{dp}{p} = -\frac{p_0}{\rho_0 g} (\ln p + \ln C) = -\frac{p_0}{\rho_0 g} (\ln pC).$$

A logaritmus argumentumában azért hagyhattuk el az abszolútértéket, mert a nyomás értékei mindig pozitívak.
Fejezzük ki a $p(z)$ függvényt:

$$p = \frac{1}{C} e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} z}.$$

A C értékét a kezdeti feltételből kapjuk,

$$p(z=0) = \frac{1}{C} = p_0.$$

A keresett megoldás:

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} z} = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g}{p_0} z\right).$$

3.2. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Az

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

elsőrendű differenciálegyenlet változói szétválaszthatók, ha az egyenlet felírható az

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$$

alakban. Ugyanis, ha $g_1(y)f_2(x) \neq 0$, akkor elosztva ezzel az egyenletet

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = 0$$

vagy más jelöléssel

$$F(x)dx + G(y)dy = 0,$$

és itt az x, illetve y csak egyetlen egy tagban szerepel, ezzel a változókat szétválasztottuk. A differenciálegyenlet általános megoldása integrálással kapható:

$$\int F(x)dx + \int G(y)dy = C.$$

Vigyázzunk, hogy melyik változót tartalmazó kifejezéseket az egyenlet melyik oldalára gyűjtjük, mert ez nem önkényes, hanem ebben az esetben az x változót tartalmazó kifejezéseket oda kell átvinni, ahol a dx szerepel, és hasonlóan az y-t tartalmazó kifejezést arra az oldalra, ahol a dy szerepel.

3.8. Példa. Vegyük az $y' = xy$ alakú differenciálegyenletet. Amennyiben $y \neq 0$, a változók szétválaszhatók:

$$\frac{y'}{y} = x,$$

$$\frac{dy}{y} = xdx.$$

Mindkét oldalt integrálva kapjuk, hogy

$$\int \frac{dy}{y} = \int xdx,$$

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + \tilde{C}.$$

Innen y kifejezhető

$$y = \pm e^{\frac{x^2}{2}+\tilde{C}} = \pm C^{\star} e^{\frac{x^2}{2}} = Ce^{\frac{x^2}{2}},$$

ahol C tetszőleges valós szám.
Itt a $C = 0$ esetben adódó partikuláris megoldás, lényegesen eltér a többi megoldástól. Az ilyen megoldást *szinguláris megoldásnak* nevezzük.

3.9. Példa. Oldjuk meg az $y' = -\frac{\sin(x)}{y}$ differnciálegyenletet.
Először végezzük el a változók szétválasztását:

$$ydy = -\sin(x)dx.$$

Integráljuk mindkét oldalt,

$$\int ydy = -\int \sin(x)dx,$$

$$\frac{y^2}{2} = \cos(x) + C.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = \pm\sqrt{2(\cos(x) + C)}.$$

3.10. Példa. Tegyünk $m_0 = 100g$ cukrot egy pohár vízbe. A cukor oldódási folyamatát a

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m} = k(m_0 - m)$$

differenciálegyenlet írja le, ahol k egy arányossági tényező. A $t_0 = 0$ időpillantban 0g cukor van az oldatban (oldott állapotban). Érdemes megjegyezni, hogy az időszerinti differenciálást ponttal is jelöljük. A fizikában sokszor fogunk ezzel a jelöléssel találkozni.
Mennyi cukor lesz az oldatban t másodperc múlva?
A megoldandó kezdeti érték probléma a következő:

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = k(m_0 - m) \\ m(t = t_0 = 0) = 0 \end{cases}.$$

Válasszuk szét a változókat,

$$\frac{dm}{(m_0 - m)} = kdt.$$

Integráljuk mindkét oldalt,

$$\int \frac{dm}{(m_0 - m)} = k \int dt,$$

$$-\ln(m_0 - m) + \ln C = kt,$$

$$\ln\left(\frac{m_0 - m}{C}\right) = -kt,$$

$$m = m_0 - Ce^{-kt}$$

A kezdeti feltételből a C meghatározható,

$$m(t = t_0 = 0) = m_0 - C = 0,$$

$$C = m_0.$$

A megoldás:

$$m = m_0 \left(1 - e^{-kt}\right).$$

3.11. Példa. Newton-féle lehűlési törvény

Egy szabadon álló, környezeténél melegebb test lehűlését vizsgáljukt. Ezt a folyamatot a

$$\frac{dT}{dt} = \dot{T} = -K(T - T_k)$$

differenciálegyenlet írja le, melyet Newton-féle lehűlési törvénynek nevezünk. A T_k a környezet állandónak feltételezett hőmérséklete; K egy anyagi állandó és a T a test hőmérséklete. Adjuk meg a $T = T(t)$ függvényt. Kezdetben $T_0 (> T_k)$ a test hőmérséklete. A következő kezdeti érték problémát kell megoldanunk:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = \dot{T} = -K(T - T_k) \\ T(t = t_0 = 0) = T_0 \end{cases},$$

Válasszuk szét a változókat,

$$\frac{dT}{T - T_k} = -K dt.$$

Integráljuk mindkét oldalt,

$$\int \frac{dT}{T - T_k} = -K \int dt,$$

$$\ln(T - T_k) + \ln C = -Kt,$$

$$T = T_k + \frac{1}{C} e^{-Kt}.$$

A kezdeti feltételből a C meghatározható,

$$T(t = t_0 = 0) = T_k + \frac{1}{C} = T_0,$$

$$\frac{1}{C} = T_0 - T_k.$$

A megoldás:

$$T = T_k + (T_0 - T_k)e^{-Kt}.$$

3.12. Példa. Abszorpció
Ha egy I_0 intenzitású lézer nyaláb áthalad egy közegen, akkor azt tapasztaljuk, hogy az intenzitása csökken. Ezt a folyamatot abszorpciónak nevezzük. Az abszorpciót a

$$\frac{dI}{dz} = -\mu I$$

differenciálegyenlet írja le, ahol a μ az abszorpciós koefficiens. Oldjuk meg az alábbi kezdeti érték problémát:

$$\begin{cases} \frac{dI}{dz} = -\mu I \\ I(z = z_0 = 0) = I_0 \end{cases}.$$

Válasszuk szét a változókat,

$$\frac{dI}{I} = -\mu dz.$$

Integráljuk mindkét oldalt,

$$\ln I + \ln C = -\mu z,$$

$$I = \frac{1}{C} e^{-\mu z}.$$

A kezdeti feltételből a C meghatározható,

$$I(z = z_0 = 0) = \frac{1}{C} = I_0.$$

A megoldás:

$$I = I_0 e^{-\mu z}.$$

Megjegyezzük, hogy az abszorpció folyamatával az olvasó találkozik még tanulmányai során.

3.13. Példa. Radioaktív bomlási törvény
A radioaktív bomlás teljesen véletlen jelenség, egy adott atommagról nem lehet megállapítani, hogy mikor fog elbomlani, viszont az elbomlásának időbeni valószínűsége állandó. Egy forrásban a bomlások száma tehát arányos a radioaktív magok számával, amit a következő differenciálegyenlet ír le:

$$\frac{dN}{dt} = \dot{N} = -aN,$$

ahol a a bomlásállandó. A kezdeti feltétel: $N(t = t_0 = 0) = N_0$. Ennek a differenciálegyenletnek a megoldása ugyanúgy történik, mint az abszorpciós példánk esetében. A megoldás:$N = N_0 e^{-at}$.
A T, felezési idő elteltével a kezdeti atommagok száma a felére csökken, azaz $N(t = T) = \frac{N_0}{2}$. Behelyettesítünk,

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-aT},$$

$$\ln 2 = aT,$$

$$T = \frac{\ln 2}{a}.$$

3.14. Példa. A folyadékcsepp a felszínével arányos sebességgel párolog el. Határozzuk meg a gömb alakú folyadékcsepp sugarát, mint az idő függvényét!
A folyamatot a

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = -k4r^2\pi$$

differenciálegyenlet írja le, ahol k arnyossági tényező. A következő kezdeti érték problémát kell megoldanunk:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \dot{r} = -k4r^2\pi \\ r(t = t_0 = 0) = R \end{cases}.$$

Válasszuk szét a változókat,

$$\frac{dr}{r^2} = -k4\pi dt.$$

Integráljuk mindkét oldalt,

$$\int \frac{dr}{r^2} = -k4\pi \int dt,$$

$$-\frac{1}{r} = -k4\pi t + C,$$

$$r = \frac{1}{k4\pi t - C}.$$

A kezdeti feltételből a C meghatározható,

$$r(t = t_0 = 0) = -\frac{1}{C} = R.$$

A megoldás:

$$r = \frac{R}{4kR\pi t + 1}.$$

3.3. Homogén fokszámú differenciálegyenletek

3.15. Definíció. *Az $f(x, y)$ kétváltozós függvényt n-ed fokú homogén függvénynek nevezzük, ha*

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

3.16. Példa. Vegyük az $f(x, y) = x^4 - x^3 y$ függvényt.

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^4 - (\lambda x)^3(\lambda y) = \lambda^4(x^4 - x^3 y).$$

Azaz az $f(x, y)$ függvényünk 4-ed fokú és homogén.
Vegyük a $g(x, y) = e^{\frac{y}{x}} + \tan\left(\frac{y}{x}\right)$ függvényt.

$$g(\lambda x, \lambda y) = e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}} + \tan\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) = e^{\frac{y}{x}} + \tan\left(\frac{y}{x}\right) = \lambda^0 g(x, y).$$

Azaz a $g(x, y)$ függvényünk 0-ad fokú és homogén.
Vegyük az $h(x, y) = x^2 + \sin(x)\cos(y)$ függvényt.

$$h(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + \sin(\lambda x)\cos(\lambda y) \neq \lambda^n h(x, y).$$

Azaz a $h(x, y)$ függvényünk nem n-ed fokú homogén.

3.17. Definíció. *Az*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

elsőrendű differenciálegyenletet, akkor nevezzük homogén fokszámúnak, ha az $M(x,y)$ és $N(x,y)$ függvények ugyanolyan fokszámú homogén függvények.

Ha egy differenciálegyenlet homogén fokszámú, akkor átrendezés után

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

alakra hozható.

A homogén fokszámú differenciálegyenlet az

$$\tfrac{y}{x} = u, \text{ azaz } y = xu$$

helyettesítéssel (transzformációval) mindig visszavezethető szétválasztható változójú differenciálegyenletre, ha az $M(x,y)$ és $N(x,y)$ függvények és parciális deriváltjai folytonosak.
Előfordulhat továbbá az is, hogy az előbb ismertetett helyettesítés helyett az

$$\tfrac{x}{y} = u, \text{ azaz } x = yu$$

helyettesítés az előnyösebb. Nem lehet általános érvényű receptet adni arra, hogy az egyes egyenleteknél melyik helyetesítés a célravezetőbb. Ha sok ilyen jellegű példát oldunk meg, akkor rutint szerzünk.

3.18. Példa. Vegyük a következő egyszerű egyenletet: $y' = 2\frac{y}{x}$. Oldjuk meg kétféleképpen a feladatot.
A.)
Válasszuk szét a változókat $(y \neq 0; x \neq 0)$:

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}.$$

Integrálva mindkét oldalt:

$$\ln|y| + \ln C = 2\ln|x|,$$
$$\ln C\,|y| = \ln x^2,$$
$$y = \tilde{C}x^2.$$

B.)
A differenciálegyenletünk $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ alakú, azaz homogén fokszámú. Alkalmazzuk az $\frac{y}{x} = u$ helyettesítést a differenciálegyenlet mindkét oldalán,

$$y' = 2u,$$

$$y' = (ux)' = \frac{d}{dx}(ux) = \frac{du}{dx}x + u\frac{dx}{dx} = u'x + u.$$

A helyettesítés után kapott egyenlet egy szétválaszható változójú differenciálegyenlet:

$$u'x = u,$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x},$$
$$u = Cx.$$

Mivel az $u = \frac{y}{x}$, így:

$$y = Cx^2.$$

Ne legyen zavaró, hogy az integrációs konstansokat különböző képpen jelöltük, hiszen akár a $\tilde{C} = C = A$ választással is élhettünk volna. Ne felejtsük el, tetszőlegesen megválaszhatók az integrációs konstansok. Valamint, a kapott általános megoldást bármikor ellenőrizhetjük differenciálással.

3.19. Példa. Megoldandó az

$$x \sin\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x} + xy'\cos\frac{y}{x} = 0$$

differenciálegyenlet.
Ha az egyenletet elosztjuk x-szel ($x \neq 0$), akkor látszik, hogy a differenciálegyenlet homogén fokszámú, mert

$$\sin\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} + y'\cos\frac{y}{x} = 0.$$

Alkalmazzuk az $\frac{y}{x} = u$ helyettesítést:

$$y' = u + xu',$$

$$\sin u - u\cos u + (u + xu')\cos u = 0,$$
$$xu'\cos u + \sin u = 0.$$

Válasszuk szét a változókat,

$$\frac{\cos u}{\sin u}du = -\frac{dx}{x}.$$

Integráljuk az egyenlet baloldalát:

$$\int \frac{\cos u}{\sin u}du = \begin{bmatrix} t := \sin u \\ dt = \cos(u)du \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|\sin u| + \ln A.$$

Integráljuk az egyenlet jobboldalát:

$$-\int \frac{dx}{x} = -\ln|x| + \ln B.$$

Ha bevezetjük az $\ln(B - A) = \ln C$ kifejezést, akkor kapjuk, hogy

$$\ln|\sin u| = -\ln|x| + \ln C = \ln\frac{C}{|x|},$$

$$\sin u = \frac{C}{x},$$

azaz visszahelyettesítés után megkapjuk az általános megoldást implicit alakban,

$$x\sin\frac{y}{x} = C.$$

3.20. Példa. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$(x+y)dx + (y-x)dy = 0.$$

Rendezzük át az egyenletet,

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{x+y}{x-y} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}.$$

A fenti differenciálegyenlet $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ alakú, azaz homogén fokszámú. Kézenfekvőbb módszer, ha ellenőrizzük, hogy az $M(x,y)$ és $N(x,y)$ homogén függvények-e.

$$M(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda y) = \lambda(x+y) = \lambda M(x,y),$$

$$N(\lambda x, \lambda y) = (\lambda y - \lambda x) = \lambda(y-x) = \lambda N(x,y).$$

Így is megállápítottuk, hogy homogén fokszámú differenciálegyenlettel van dolgunk, hiszen az $M(x,y)$ és $N(x,y)$ homogén függvények és a fokszámuk is megegyezik (első fokúak). Alkalmazzuk az $\frac{y}{x} = u$ helyettesítést a differenciálegyenlet mindkét oldalán,

$$y' = u + xu',$$

$$\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} = \frac{1+u}{1-u}.$$

A helyettesítés után kapott differenciálegyenlet:

$$u + xu' = \frac{1+u}{1-u}.$$

Szétválasztjuk a változókat,

$$\frac{1-u}{1+u^2}u' = \frac{1}{x},$$

$$\frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{dx}{x}.$$

Integráljuk az egyenlet baloldalát:

$$\frac{1-u}{1+u^2}du = \int \frac{1}{1+u^2}du - \int \frac{u}{1+u^2}du,$$

$$\int \frac{u}{u^2+1}du = \begin{bmatrix} t := u^2+1 \\ dt = 2udu \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\ln\sqrt{(u^2+1)} - \ln A = -\ln A\sqrt{(u^2+1)},$$

$$\int \frac{1}{u^2+1}du = \arctan u + B.$$

Tehát a teljes integrál:

$$\frac{1-u}{1+u^2}du = \arctan u + B - \ln A\sqrt{(u^2+1)}.$$

Integráljuk az egyenlet jobboldalát:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln C = \ln C\,|x|\,.$$

Visszahelyettesítés után, megkapjuk az általános megoldást implicit alakban:

$$\arctan u + B - \ln A\sqrt{(u^2+1)} = \ln C\,|x|\,,$$

$$\arctan u = \ln|x| + \ln\sqrt{(u^2+1)} + \underbrace{\ln A + \ln C - B}_{\ln D :=},$$

$$\arctan u = \ln D\,|x|\,\sqrt{(u^2+1)},$$

$$\arctan u = \ln D\sqrt{(u^2x^2+x^2)},$$

$$\arctan\frac{y}{x} = \ln D\sqrt{(y^2+x^2)}.$$

3.21. Példa. Megoldandó az

$$\left(1+2e^{\frac{x}{y}}\right)dx + 2\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy = 0$$

differenciálegyenlet. Mivel

$$M(\lambda x,\lambda y) = \left(1+2e^{\frac{\lambda x}{\lambda y}}\right) = \lambda^0 M(x,y) = M(x,y),$$

$$N(\lambda x,\lambda y) = 2\left(1-\frac{\lambda x}{\lambda y}\right)e^{\frac{\lambda x}{\lambda y}} = \lambda^0 N(x,y) = N(x,y),$$

a differenciálegyenlet homogén fokszámú (foka 0). Vegyük észre, hogy a differenciálegyenlet most nem

$$y' = f\left(\tfrac{y}{x}\right), \text{hanem } y' = f\left(\tfrac{x}{y}\right)$$

alakú.
Alkalmazzuk az $\frac{x}{y} = u$ helyettesítést,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(uy) = y\frac{du}{dy} + u,$$

$$dx = ydu + udy,$$

és a differenciálegyenlet

$$(1+2e^u)(ydu+udy) + 2(1-u)e^u dy = 0$$

alakú.
Rendezve

$$y(1+2e^u)du + (u+2e^u)dy = 0.$$

A változókat szétválasztva

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1+2e^u}{u+2e^u}du.$$

Integráljuk mindkét oldalt:

$$\int\frac{dy}{y} = \ln|y| + \ln A,$$

$$-\int \frac{1+2e^u}{u+2e^u}du = \begin{bmatrix} t := u+2e^u \\ dt = (1+2e^u)du \end{bmatrix} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|u+2e^u| + \ln B.$$

Integrálás után

$$\ln|y| + \ln A = -\ln|u+2e^u| + \ln B,$$

$$\ln|y| = -\ln|u+2e^u| + \underbrace{\ln\frac{B}{A}}_{\ln C:=},$$

$$\ln|y| = \ln\left(\frac{C}{|u+2e^u|}\right).$$

A visszahelyettesítés után,

$$y = \frac{C}{\frac{x}{y} + 2e^{\frac{x}{y}}},$$

amiből megkapjuk implicit alakban az általános megoldást:

$$x + 2ye^{\frac{x}{y}} = C.$$

3.4. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek. Az állandó variálásának módszere.

Az elsőrendő lineáris differenciálegyenletek általános alakja

$$y' + p(x)y = q(x),$$

ahol $p(x)$ és $q(x)$ adott folytonos függvények.

3.22. Definíció. *Ha $q(x) \equiv 0$, akkor az elsőrendű lineáris differenciálegyenletet homogénnek, különben inhomogénnek nevezzük.*

Először a homogén esettel foglalkozunk.
Oldjuk meg az $y'+p(x)y = 0$ elsőrendű lineáris, homogén differenciálegyenletet. Vegyük észre, hogy ez egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet, tehát

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Integráljuk mindkét oldalt

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx,$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \tilde{C},$$

$$y = C\exp\left(-\int p(x)dx\right).$$

Ezzel megkaptuk a homogén differenciálegyenlet általános megoldását.

3.23. Példa. Oldjuk meg az $y' + 2xy = 0$ differenciálegyenletet. Válasszuk szét a változókat, majd integráljunk:

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int x dx,$$
$$\ln|y| = -x^2 + \tilde{C}.$$

Megkaptuk az általános megoldást:

$$y = C \exp\left(-x^2\right).$$

A következő tétel ad választ arra, hogy hogyan kapjuk meg az inhomogén differenciálegyenlet megoldását.

3.24. Tétel. *Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása a homogén egyenlet általános megoldása, valamint az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása összegeként áll elő.*

3.25. Bizonyítás. *Jelölje y az inhomogén egyenlet általános megoldását, és y_p az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását (ebben nincs szabadon választható konstans). Ekkor*

$$y' + p(x)y = q(x)$$
$$y_p' + p(x)y_p = q(x).$$

Kivonással kapjuk, hogy

$$(y - y_p)' + p(x)(y - y_p) = 0.$$

Tehát az $y_h = y - y_p$ a homogén differenciálegyenletnek megoldása, sőt az általános megoldása (mivel szerepel benne egy tetszőlegesen választható konstans), azaz

$$y = y_h + y_p.$$

Ezzel bebizonyítottuk a tételt.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását (y_p) a konstans variálás módszerével tudjuk megadni.
Ennek lényege, hogy a homogén egyenlet általános megoldásában (y_h) szereplő C szabad paramétert, mint $C(x)$ függvényt tekintjük, és a $C(x)$ függvényt úgy választjuk meg, hogy

$$y_p = C(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right)$$

megoldása legyen az inhomogén egyenletnek. Ez akkor teljesül, ha

$$y_p' + p(x)y_p = q(x),$$

azaz

$$C'(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right) - p(x)C(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right) + p(x)C(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right) = q(x),$$

$$C'(x) = q(x) \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right),$$

tehát

$$C(x) = \int q(x) \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right) dx.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását ezzel meghatároztuk, ez a következő:

$$y_p(x) = C(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right) = \left(\int q(x) \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right) dx\right) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right).$$

Az előzőek alapján tehát az elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = y_h + y_p = C \exp\left(-\int p(x)dx\right) + \left(\int q(x) \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right) dx\right) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right).$$

3.26. Példa. Most alkalmazzuk a konstans variálás módszerét egy konkrét feladatban. Oldjuk meg a következő lineáris differenciálegyenletet:

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2.$$

Először keressük meg a homogén egyenlet y_h általános megoldását. Tehát oldjuk meg az $y' - \frac{y}{x} = 0$ egyenletet.
Válasszuk szét a változókat, majd integráljunk:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C,$$

$$y_h = Cx.$$

Az inhomogén differenciálegyenlet y_p partikuláris megoldását a konstans variálásának módszerével keressük meg. Legyen tehát

$$y_p = C(x)x$$

alakú.
Ekkor

$$y_p' = C'(x)x + C(x).$$

Helyettesítsünk be az eredeti (inhomogén) differenciálegyenletbe:

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2,$$

$$C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = x^2 + 3x - 2,$$
$$C'(x) = x + 3 - \frac{2}{x},$$
$$C(x) = \int \left(x + 3 - \frac{2}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 3x - \ln x^2.$$

Ennek segítségével

$$y_p = C(x)x = \frac{x^3}{2} + 3x^2 - x\ln x^2.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y = y_h + y_p = Cx + \frac{x^3}{2} + 3x^2 - x\ln x^2.$$

3.27. Példa. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$y' - y = \sin x + \cos x + 1.$$

Először keressük meg a homogén egyenlet y_h általános megoldását. Tehát oldjuk meg az $y' - y = 0$ egyenletet.
Válasszuk szét a változókat, majd integráljunk:

$$\frac{dy}{y} = dx,$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int dx,$$
$$\ln|y| = x + A,$$
$$y_h = Ce^x,$$

ahol $C = e^A$. Az inhomogén differenciálegyenlet y_p partikuláris megoldását a konstans variálásának módszerével keressük meg. Legyen tehát

$$y_p = C(x)e^x$$

alakú.
Ekkor

$$y_p' = C'(x)e^x + C(x)e^x = C'(x)e^x + y_p.$$

Helyettesítsünk be az eredeti (inhomogén) differenciálegyenletbe:

$$y' - y = \sin x + \cos x + 1,$$
$$C'(x)e^x + y_p - y_p = \sin x + \cos x + 1,$$
$$C'(x) = (\sin x + \cos x + 1)e^{-x},$$
$$C(x) = \int (\sin x + \cos x + 1)e^{-x} dx.$$

Számítsuk ki előbb az $\int(\sin x)e^{-x}dx$-t a parciális integrálás szabálya szerint. Legyen $f = e^{-x}$, $g' = \sin x$, ekkor $f' = -e^{-x} = -f$ és $g = -\cos x$. Ezzel

$$\int e^{-x}\sin x dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x dx,$$

$$\int e^{-x}\sin x dx + \int e^{-x}\cos x dx = -e^{-x}\cos x,$$

és ezzel $C(x)$ kifejezéséből egyszerre két integrált határoztunk meg. Így

$$C(x) = -(1+\cos x)e^{-x},$$

amivel

$$y_p = C(x)e^x = -(1+\cos x),$$

és az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = y_h + y_p = y_h = Ce^x - (1+\cos x).$$

Most közlünk még egy módszert, amivel meg tudjuk adni az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását. Tegyük fel, hogy az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása két, csak az x változótól függő (egyenlőre ismeretlen) függvény szorzata:

$$y = g(x)h(x) = g \cdot h.$$

Ekkor

$$y' = g'h + gh',$$

ezt behelyettesítve az egyenletbe,

$$y' + p(x)y = q(x),$$

$$(g'h + gh') + p(x)gh = q(x),$$

$$h(g' + p(x)g) + gh' - q(x) = 0.$$

Vegyük észre, hogy az átrendezett egyenlet bármilyen x értékre teljesül, ha mindkét tagja külö-külön nullát ad, azaz

$$(1) : g' + p(x)g = 0,$$

$$(2) : gh' - q(x) = 0.$$

A $g(x)$ függvény, az előbbiek alapján

$$g(x) = C\exp\left(-\int p(x)dx\right),$$

mert az (1) egy homogén, lineáris differenciálegyenlet.
Behelyettesítve $g(x)$-et a (2)-be:

$$h(x) = C\int q(x)\exp\left(-\int p(x)dx\right)dx + D.$$

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = g(x)h(x) = C\exp\left(-\int p(x)dx\right)\left(C\int q(x)\exp\left(-\int p(x)dx\right)dx + D\right).$$

3.28. Példa. Oldjuk meg a (3.26.)-os példánkat újra, de most a szorzatfüggvényes módszerrel. Tehát a megoldandó differenciálegyenlet:

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2.$$

Keressük a megoldást $y = g(x)h(x)$ alakban. Ekkor

$$y' = g'h + gh',$$

ezt behelyettesítve az egyenletbe,

$$g'h + gh' - \frac{gh}{x} = x^2 + 3x - 2.$$

Rendezzük át,

$$(g'h - x^2 - 3x + 2) + g\left(h' - \frac{h}{x}\right) = 0.$$

Tehát mind a két tagnak külön-külön nullát kell adniuk:

$$(1) : h' - \frac{h}{x} = 0,$$

$$(2) : g'h - x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Az (1) egyenlet megoldása:

$$h(x) = Cx.$$

A kapott megoldást behelyettesítve a (2)-be:

$$g'Cx - x^2 - 3x + 2 = 0,$$

$$Cg' - x - 3 + \frac{2}{x} = 0,$$

$$g' = \frac{1}{C}\left(x + 3 - \frac{2}{x}\right).$$

Integrálva mindkét oldalt,

$$g(x) = \frac{1}{C}\left(\frac{x^2}{2} + 3x - \ln x^2\right) + \frac{D}{C}.$$

Mostmár meg tudjuk adni az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y = g(x)h(x) = \frac{x^3}{2} + 3x^2 - x\ln x^2 + Dx.$$

4. fejezet

Másodrendű differenciálegyenletek.

A másodrendű differenciálegyenletek legáltalánosabb alakja

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

ahol F az x független változó és a (legalább) kétszer differenciálható y függvény és deriváltjainak valamilyen függvénye. Ha az egyenletből y'' kifejezhető, akkor a differenciálegyenlet felírható az

$$y'' = f(x, y, y')$$

explicit alakban is. Az általános másodrendű differenciálegyenletek megoldására általános módszer nem ismeretes. Bizonyos speciális alakú, ill. típusú másodrendű differenciálegyenletek megoldására találtak megoldási módszereket.
Ismét meg kell jegyeznünk, hogy a segédlet keretein belül nem tudjuk bemutatni az összes megoldási fogást, de a fizikában is fontos szerepet játszó másodrendű differenciálegyenlet típusokra közöljük a megoldási módszereket.

4.1. Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

A legegyszerűbb az

$$y'' = f(x)$$

alakú differenciálegyenletnek a megoldása. Kétszeri integrálással kapjuk a megoldást:

$$y(x) = \int_b^x \left(\int_a^\xi f(t)dt \right) d\xi + Cx + D.$$

4.1. Példa. Megjegyezzük, hogy a szabadon eső test mozgását leíró egyenlet is ilyen típusú másodrendű differenciálegyenlet. Az olvasó az elméleti mechanika gyakorlat keretében láthatja a megoldást.

4.2. Példa. Oldjuk meg az $y'' - \cos 2x = 0$ differenciálegyenletet. Integráljuk kétszer az egyenletet,

$$y' = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + A,$$

$$y = \frac{1}{2} \int (\sin 2x + A)\, dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + Ax + B.$$

Egy újabb típusa a hiányos másodrendű differenciálegyenleteknek az

$$F(x, y', y'') = 0$$

alakú egyenletek. Látszik, hogy az y hiányzik az egyenletből. Ekkor a másodrendű differenciálegyenlet megoldása könnyen visszavezethető két elsőrendű differenciálegyenlet megoldására az

$$y' = p(x)$$

helyettesítés segítségével. Ekkor ugyanis $y'' = p'(x)$, és eredeti egyenletünk

$$F(x, p, p') = 0$$

alakú lesz, és ebből p meghatározható. A p ismeretében pedig a helyettesítést kifejező egyenletből y számítható ki.

4.3. Példa. Határozzuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$xy'' - y' = x^3.$$

Most $y'' = p'(x)$ és így egyenletünk a helyettesítés után

$$xp' - p = x^3$$

alakú. Elsőrendű, lineáris, inhomogén, függvényegyütthatós egyenletről van szó. A homogén egyenlet

$$xP' - P = 0.$$

Ennek megoldása

$$P = C \exp\left(-\int -\frac{1}{x}dx\right) = Cx.$$

Az inhomogén egyenlet egy p_0 partikuláris megoldását

$$p_0 = C(x)x$$

alakban a konstans variálásának módszerével keressük meg. Mivel

$$p_0' = C'(x)x + C(x),$$

majd ezt behelyettesítve az inhomogén egyenletbe,

$$C'(x)x^2 + C(x)x - C(x)x = x^3.$$

Ebből

$$C'(x) = x,$$

illetve, integrálás után

$$C(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Tehát az elsőrendű inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$p_0 = C(x)x = \frac{x^3}{2}.$$

A másodrendű differenciálegyenlet általános megoldása pedig

$$p = P + p_0 = \frac{x^3}{2} + Cx.$$

Mivel $p = y'$, ezért

$$y = \int \left(\frac{x^3}{2} + Cx \right) dx = \frac{x^4}{8} + \frac{Cx^2}{2} + A.$$

4.2. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek

Általános alakjuk

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x),$$

ahol $p_1(x)$, $p_0(x)$ és $q(x)$ adott folytonos függvények. Ha $q(x) \equiv 0$, akkor homogén, különben inhomogén differenciálegyenletnek nevezzük.

4.4. Tétel. *Ha y_1 és y_2 a homogén egyenletnek két tetszőleges megoldása, akkor bármely c_1 és c_2 valós számok esetén $c_1y_1 + c_2y_2$ is megoldása a homogén egyenletnek. Másképpen megfogalmazva, a megoldások lineáris kombinációja is megoldása a homogén egyenletnek.*

4.5. Definíció. *Az y_1 és y_2 függvényeket az $[a, b]$ intervallumon lineárisan függetlennek nevezzük, ha abból, hogy az $[a, b]$ intervallumon mindenütt*

$$c_1y_1 + c_2y_2 = 0$$

teljesül, következik, hogy a c_1 és c_2 konstansok nullák. Ellenkező esetben az y_1 és y_2 függvényeket lineárisan függőknek nevezzük $[a, b]$-n.

4.6. Definíció. *A*

$$W = W(y_1, y_2) == \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

determinánst, Wronski-determinánsnak nevezzük.

4.7. Tétel. *Ha a differenciálható y_1 és y_2 függvények lineárisan függőek $[a, b]$-n, akkor a Wronski-determinánsuk $[a, b]$-n mindenütt nulla.*

4.8. Tétel. *Ha y_1 és y_2 a homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet megoldásai, akkor Wronski-determinánsuk vagy mindenütt nulla, vagy sehol sem nulla, aszerint, hogy ezek a megoldások lineárisan függőek vagy függetlenek.*

4.9. Tétel. *Ha y_1 és y_2 a homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet két lineárisan független megoldása, akkor a homogén egyenlet bármely megoldása ezek lineáris kombinációjaként előállítható, azaz*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

Úgy is fogalmazhatunk, hogy a homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet általános megoldása előáll két lineárisan független megoldásának lineáris kombinációjaként.

4.10. Tétel. *Az inhomogén egyenlet általános megoldása a homogén egyenlet általános és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összegeként áll elő.*

Feltéve, hogy a homogén differenciálegyenlet két lineárisan független megoldása, az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása most is az ún. konstans variálás módszerrel történik. E módszer abból áll, hogy a homogén egyenlet általános megoldásában ($y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$) szereplő c_1 és c_2 konstansokat differenciálható $c_1(x)$ és $c_2(x)$ függvényekkel pótoljuk, és ezeket úgy akarjuk megválasztani, hogy az

$$y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

függvény az inhomogén differenciálegyenlet megoldása legyen.
Az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását, amennyiben a homogén egyenlet két linaárisan független megoldása $y_1(x)$ és $y_2(x)$ ismert, úgy határozzuk meg, hogy vesszük a

$$c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0$$
$$c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) = q(x)$$

egyenletrendszer megoldásfüggvényeit, a $c_1'(x)$ és $c_2'(x)$-szel jelölt függvényeket, ezeket integráljuk, és az így kapott $c_1(x)$ és $c_2(x)$ függvényekkel képezzük az

$$y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

függvényt. Az inhomogén egyenlet általános megoldását pedig

$$y(x) = y_h + y_p = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p$$

adja, ahol c_1 és c_2 tetszés szerinti konstansok.

4.11. Példa. Oldjuk meg az

$$y'' + y = \sin x \cos x$$

inhomogén, másodrendű, lineáris differenciálegyenletet. Először adjuk meg a homogén egyenlet általános megoldását. Könnyen látható és ellenőrizhető, hogy a homogén egyenlet két lineárisan független megoldása

$$y_1 = \sin x \text{ és } y_2 = \cos x.$$

Tehát a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_h = c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Ezek után az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását kell megkeresnünk. Vegyük a

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0$$
$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = q(x)$$

egyenletrendszert ennél a konkrét feladatnál:

$$c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = 0$$

$$c_1'(x)\cos x + c_2'(x)(-\sin x) = \sin x \cos x.$$

Mivel $W(\sin x, \cos x) = -1$, így $c_1'(x)$ és $c_2'(x)$ egyszerű számolással meghatározható (Cramer-szabály alkalmazható), azaz

$$c_1'(x) = \sin x \cos^2 x,$$

$$c_2'(x) = -\sin^2 x \cos x.$$

Innen parciális integrálással,

$$c_1(x) = \int \sin x \cos^2 x dx = -\frac{\cos^3 x}{3},$$

$$c_2(x) = -\int \sin^2 x \cos x dx = -\frac{\sin^3 x}{3},$$

tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_p = -\frac{\cos^3 x}{3}\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\cos x = -\frac{1}{6}\sin 2x.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása tehát

$$y(x) = y_h + y_p = c_1 \sin x + c_2 \cos x - \frac{1}{6}\sin 2x.$$

A konstans variálás módszere mellett az olvasó figyelmébe ajánlunk egy újabb módszert. Ez az ún. próbafüggvény módszere.
Ha $\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = q(x)$ differenciálegyenletben a $q(x)$ zavaró függvény speciális alakú, mégpedig

– polinom,

– exponenciális függvény (ne felejtsük el az $\sinh x$ és $\cosh x$ függvényeket sem),

– $\sin(ax \pm b)$ és $\cos(ax \pm b)$,

vagy ezek összege, szorzata, összegének szorzata, szorzatának összege, ekkor az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldását ugyanolyan alakú függvénynek tételezzük fel, mint a zavaró függvényt.

4.12. Példa. Nézzük az előző példánkat!
A differenciálegyenletünk: $y''+y = \sin x \cos x$, ahol a zavaró függvény, $q(x) = \sin x \cos x = = \frac{1}{2}\sin 2x$. Keressük a partikuláris megoldást

$$y_p(x) = A\sin 2x$$

alakban. Ekkor

$$y'' = -4A\sin 2x,$$

és behelyettesítve az egyenletbe kapjuk, hogy

$$-4A\sin 2x + A\sin 2x - \frac{1}{2}\sin 2x = 0,$$

$$\left(-4A + A - \frac{1}{2}\right)\sin 2x = 0.$$

Vegyük észre, hogy a fenti egyenlet, akkor teljesül mnden x-re, ha

$$\left(-4A + A - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$A = -\frac{1}{6}.$$

Tehát a partikuláris megoldás:

$$y_p(x) = -\frac{1}{6}\sin 2x.$$

4.3. Konstans együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenletek.

A konstans együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenlet alakja

$$\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0.$$

Mivel az exponenciális függvény az egyetlen, amely deriváltjaival arányos, ezért a megoldást kereshetjük

$$y = Ce^{\lambda x}$$

alakban, ahol λ egy ismeretlen szám. Mivel $y' = C\lambda e^{\lambda x} = \lambda y$, és $y'' = C\lambda^2 e^{\lambda x} = \lambda^2 y$. Ahhoz, hogy $y = Ce^{\lambda x}$ függvény megoldása legyen a differenciálegyenletnek, teljesülnie kell a

$$Ce^{\lambda x}(\alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma) = 0$$

egyenletnek. Mivel $Ce^{\lambda x} \neq 0$, így λ-nak ki kell elégítenie a

$$\alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0$$

másodfokú, ún. karakterisztikus egyenletet. Tehát $Ce^{\lambda x}$ csak akkor lesz megoldás, ha

$$\lambda = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

A.)
Ha $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, akkor a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós gyöke van, λ_1 és λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Ekkor

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \text{ és } y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

két különböző megoldás, és mivel $W(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}) = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} \neq 0$, így ezek a megoldások lineárisan függetlenek is.
Ekkor az általános megoldás alakja:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

B.)
Ha $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, akkor a karakterisztikus egyenletnek

$$\lambda = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

kétszeres gyöke, és így csak egy megoldást kapunk, ez $y_1 = e^{-\frac{\beta}{2\alpha}x} = \exp\left(-\frac{\beta}{2\alpha}x\right)$.
Egy másik megoldás ebben az esetben

$$y_2 = xe^{-\frac{\beta}{2\alpha}x} = xy_1$$

lesz. Az olvasó könnyedén beláthatja, hogy y_2 is megoldása a konstans együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenletenek, ha behelyettesíti az $\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0$ egyenletbe y_2-t. Valamint egyszerűen belátható, hogy $W(e^{-\frac{\beta}{2\alpha}x}, xe^{-\frac{\beta}{2\alpha}x}) \neq 0$, tehát

$$y_1(x) = e^{-\frac{\beta}{2\alpha}x} \text{ és } y_2(x) = xe^{-\frac{\beta}{2\alpha}x}$$

lineárisan független megoldásai a differenciálegyenletnek.
Az általános megoldás alakja: $y(x) = e^{-\frac{\beta}{2\alpha}x}(c_1 + xc_2)$.
C.)
Ha $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$, a karakterisztikus egyenletnek két különböző komplex gyöke van, $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ és $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ komplexértékű függvények. Az Euler-összefüggés és $y(x) \in \mathbb{R}$ megkövetelésével eljutunk az

$$y(x) = e^{-\frac{\beta}{2\alpha}x}\left(c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x\right)$$

alakú általános megoldáshoz, ahol $\omega = \frac{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}{2\alpha}$.

4.13. Példa. Írjuk fel az $4y'' + 4y' + 37y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását. Keressük a megoldást $Ce^{\lambda x}$ alakban. Mivel

$$y' = C\lambda e^{\lambda x},$$

$$y'' = C\lambda^2 e^{\lambda x}.$$

Ezek után helyettesítsük be a deriváltakat a diffrenciálegyenletbe és megkapjuk a karakterisztikus egyenletet,

$$4\lambda^2 + 4\lambda + 37 = 0,$$

melynek gyökei

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 592}}{8} = \frac{-4 \pm 24}{8} = -\frac{1}{2} \pm 3i.$$

Meg kell követelnünk, hogy az $y(x)$ valósértékű legyen, azaz fenn kell, hogy álljon

$$y(x) = y^\star(x),$$

ahol $y^\star(x)$ az $y(x)$ komplex konjugáltja. Tehát, ha $y(x) = c_1 e^{\left(-\frac{1}{2}+3i\right)x} + c_2 e^{\left(-\frac{1}{2}-3i\right)x}$, akkor

$$y^\star(x) = c_1^\star e^{\left(-\frac{1}{2}-3i\right)x} + c_2^\star e^{\left(-\frac{1}{2}+3i\right)x}.$$

Nézzük most a valósági feltételt

$$y(x) = y^\star(x),$$

$$c_1 e^{\left(-\frac{1}{2}+3i\right)x} + c_2 e^{\left(-\frac{1}{2}-3i\right)x} = c_1^\star e^{\left(-\frac{1}{2}-3i\right)x} + c_2^\star e^{\left(-\frac{1}{2}+3i\right)x},$$

$$(c_1 - c_2^\star) e^{\left(-\frac{1}{2}+3i\right)x} + (c_2 - c_1^\star) e^{\left(-\frac{1}{2}-3i\right)x} = 0.$$

Vegyük észre, hogy a fenti egyenlet csak akkor teljesül, ha

$$c_1 = c_2^\star$$

$$c_1^\star = c_2.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 e^{3ix} + c_2 e^{-3ix}\right) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 e^{3ix} + c_1^\star e^{-3ix}\right),$$

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1(\cos 3x + i\sin 3x) + c_1^\star(\cos 3x - i\sin 3x)\right),$$

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left[(c_1 + c_1^\star)\cos 3x + i(c_1 - c_1^\star)\sin 3x\right].$$

Legyen $C_1 = c_1 + c_1^\star$ és $C_2 = i(c_1 - c_1^\star)$, így

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left[C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right].$$

Megjegyezzük, hogy az Euler-összefüggést is használtuk.

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,$$

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x,$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Irodalomjegyzék

[1] Scharnitzky Viktor, *Differenciálegyenletek*, (Műszaki Könyvkiadó, Budapest,2002)

[2] Leindler László, *Analízis*, (Polygon, Szeged, 2004)

[3] Kármán Tódor, Maurice Biot, *Matematikai módszerek műszaki feladatok megoldására*, (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1967)

[4] Terjéki József, *Differenciálegyenletek*, (Polygon, Szeged, 1997)

[5] Szabó Tamás, *Kalkulus II. példatár*, (Polygon, Szeged, 2006)