

## Matematikai módszerek a fizikában 2

4. hét: Disztribúciók (általánosított függvények) — 2017. szeptember 26,28.

Görbe Tamás Ferenc

### Tartalom:

#### 1. Motiváció.

- 1.1. A Dirac-delta heurisztikus levezetése (előző előadáson).
- 1.2. Hogyan lehet értelmezni/mérni egy pont hőmérsékletét (tömegét/töltését/...)?

#### 2. Tesztfüggvények: Kompakt tartójú, sima $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ függvények $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tere.

- 2.1. Definíció.
- 2.2. Példák és ellenpéldák.
- 2.3. Konvergencia fogalom.
- 2.4. A  $\mathcal{D}(\Omega)$  tér, ahol  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  nyílt.

#### 3. Disztribúciók: Az $\ell: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos, lineáris funkcionálok $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tere.

- 3.1. Definíció.
- 3.2. Példák: Tesztfüggvényhez tartozó; Heaviside-féle  $\Theta$ ; Dirac-delta; főérték.
- 3.3. A  $\mathcal{D}'(\Omega)$  tér, ahol  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  nyílt.

#### 4. Műveletek disztribúciókkal: mindegyikre legalább egy példa.

- 4.1. Egy  $A: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  folytonos lineáris transzformáció transzponáltja.
- 4.2. Kiterjesztési tétel: Az  $A\ell$  disztribúció.
- 4.3. Disztribúció szorzása függvénnyel:  $(M_f\varphi)(x) = f(x)\varphi(x)$ .
- 4.4. Eltolás:  $(T_a\varphi)(x) = \varphi(x - a)$ .
- 4.5. Skálázás:  $(S_c\varphi)(x) = \varphi(c_1x_1, \dots, c_nx_n)$ , ahol  $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $c_j \neq 0$ .
- 4.6. Disztribúció (parciális) deriváltja; többszörös deriváltak.
- 4.7. Disztribúció határozatlan integrálja.
- 4.8. Disztribúciók összetétele (kompozíció).
- 4.9. Disztribúciók konvolúciója (kompakt tartójúaké).

#### 5. Disztribúciókkal kifejezett fizikai mennyiségek.

- 5.1. Tömegpontot leíró disztribúció; tömegpontok rendszere.
- 5.2. Dipólust leíró disztribúció.

#### 6. Alkalmazás differenciálegyenletekre: Hullámegyenlet $(1 + 1)$ -dimenzióban.

- 6.1. Gyenge értelemben vett megoldások:  $c$  sebességgel terjedő 'hullámok'.

### Ajánlott irodalom, olvasmányok:

- Cristescu, R., Marinescu, G., *Bevezetés a disztribúcióelméletbe és alkalmazásaiba*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969.
- Duistermaat, J.J., Kolk, J.A.C.: *Distributions: Theory and Applications*, Birkhauser, 2010.
- Gnädig P.: *Bevezetés a disztribúcióelméletbe és fizikai alkalmazásaiba*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.
- Lax, P.D.: *Functional analysis*, Wiley-Interscience, 2002 - B függelék.
- Rudin, W.: *Functional analysis*, McGraw-Hill, 1973 - 6. fejezet.
- Schwartz, L.: *Théorie des distributions*, Hermann, 1966.
- Strichartz, R.: *A guide to distribution theory and Fourier transforms*, CRC press, 1994.
- Wikipédia: *Distribution (mathematics)*
- Zemanian, A.H.: *Distribution theory and transform analysis: an introduction to generalized functions with applications*, Dover, 1987.
- *Laurent Schwartz (1915-2002)* in Notices of the AMS 50:9 (2003) 1072-1084