Matematikai módszerek a fizikában 2 — 1. zárthelyi dolgozat

Név: A csoport | 2017. október 12. (csütörtök)

Neptun/EHA kód:

Elért pontszám:	40 pont

---

1. Feladat. Tekintsük azt a $\underline{\underline{T}}$ másodrendű tenzort, amely egy $\underline{v} = v_x \underline{i} + v_y \underline{j} + v_z \underline{k}$ vektorhoz az alábbi vektort rendeli: (15 pont)

$$\underline{\underline{T}}\,\underline{v} = (v_z - v_y)\underline{i} - (v_x + v_z)\underline{j} + (v_y + v_z - v_x)\underline{k}.$$

(a) Határozzuk meg $\underline{\underline{T}}$ transzponáltját!

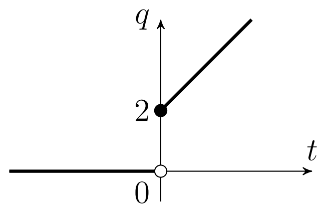
(b) Számítsuk ki $\underline{\underline{T}}$ szimmetrikus ($\underline{\underline{S}}$) és antiszimmetrikus ($\underline{\underline{A}}$) részét!

(c) Diagonalizáljuk az $\underline{\underline{S}}$ szimmetrikus részt!

(d) Adjuk meg azt az $\underline{a}$ vektort, amelyre $\underline{\underline{A}} = (\underline{a}\times)$ teljesül!

2. Feladat. Egy áramkörön áthaladó töltésmennyiség a $q(t)$ függvény szerint változik. Határozzuk meg az $I(t) = \dot{q}(t)$ áramerősséget (disztribúciós értelemben)! (5 pont)

$$q(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0, \\ t + 2, & \text{ha } t \geq 0. \end{cases}$$



A q függvény grafikonja.

3. Feladat. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket (disztribúciós értelemben)! (10 pont)

(a) $f'(x) = 2\delta$; (b) $\ddot{x}(t) + 4x(t) = \delta$, ha $x(0) = 0$, $\dot{x}(0^-) = 0$ és $\dot{x}(0^+) = 1$.

4. Feladat. Számítsuk ki az $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ függvény és $\ell \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ mérsékelt disztribúció Fourier-transzformáltjait, ha (10 pont)

(a) $f(x) = e^{-3x^2}$; (b) $\ell = 2\delta'$.

Képletgyűjtemény

Egy ℓ disztribúció deriváltjának értéke egy φ tesztfüggvényen:

$$\left\langle \frac{d}{dx}\ell, \varphi \right\rangle = -\left\langle \ell, \frac{d}{dx}\varphi \right\rangle.$$

Egy lokálisan integrálható f függvényhez tartozó ℓ_f disztribúció értéke egy φ tesztfüggvényen:

$$\langle \ell_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx.$$

Egy $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ függvény Fourier-transzformáltja:

$$\tilde{f}(p) = (Ff)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ipx}dx.$$

Gauss-integrál : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx+c}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}+c}.$

Egy $\ell \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ mérsékelt disztribúció Fourier-transzformáltjának értéke egy φ tesztfüggvényen:

$$\langle F\ell, \varphi \rangle = \langle \ell, F\varphi \rangle.$$

Matematikai módszerek a fizikában 2 **1. zárthelyi dolgozat**

Név: B csoport | 2017. október 12. (csütörtök)

Neptun/EHA kód:

Elért pontszám:	40 pont

---

1. Feladat. Tekintsük azt a $\underline{\underline{\mathrm{T}}}$ másodrendű tenzort, amely egy $\underline{\mathrm{v}} = \mathrm{v}_x\underline{i} + \mathrm{v}_y\underline{j} + \mathrm{v}_z\underline{k}$ vektorhoz az alábbi vektort rendeli: (15 pont)

$$\underline{\underline{\mathrm{T}}}\,\underline{\mathrm{v}} = (\mathrm{v}_x + \mathrm{v}_y + \mathrm{v}_z)\underline{i} + (\mathrm{v}_z - \mathrm{v}_x)\underline{j} + (\mathrm{v}_y - \mathrm{v}_x)\underline{k}.$$

(a) Határozzuk meg $\underline{\underline{\mathrm{T}}}$ transzponáltját!

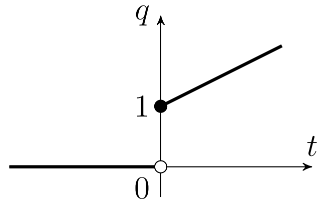
(b) Számítsuk ki $\underline{\underline{\mathrm{T}}}$ szimmetrikus ($\underline{\underline{\mathrm{S}}}$) és antiszimmetrikus ($\underline{\underline{\mathrm{A}}}$) részét!

(c) Diagonalizáljuk az $\underline{\underline{\mathrm{S}}}$ szimmetrikus részt!

(d) Adjuk meg azt az $\underline{\mathrm{a}}$ vektort, amelyre $\underline{\underline{\mathrm{A}}} = (\underline{\mathrm{a}}\times)$ teljesül!

2. Feladat. Egy áramkörön áthaladó töltésmennyiség a $q(t)$ függvény szerint változik. Határozzuk meg az $I(t) = \dot{q}(t)$ áramerősséget (disztribúciós értelemben)! (5 pont)

$$q(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0, \\ t/2 + 1, & \text{ha } t \geq 0. \end{cases}$$



A q függvény grafikonja.

3. Feladat. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket (disztribúciós értelemben)! (10 pont)

(a) $f'(x) = 3\delta$; (b) $\ddot{x}(t) + x(t) = \delta$, ha $x(0) = 1$, $\dot{x}(0^-) = 0$ és $\dot{x}(0^+) = 1$.

4. Feladat. Számítsuk ki az $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ függvény és $\ell \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ mérsékelt disztribúció Fourier-transzformáltjait, ha (10 pont)

(a) $f(x) = e^{-x^2}$; (b) $\ell = \delta'$.

Képletgyűjtemény

Egy ℓ disztribúció deriváltjának értéke egy φ tesztfüggvényen:

$$\left\langle \frac{d}{dx}\ell, \varphi \right\rangle = -\left\langle \ell, \frac{d}{dx}\varphi \right\rangle.$$

Egy lokálisan integrálható f függvényhez tartozó ℓ_f disztribúció értéke egy φ tesztfüggvényen:

$$\langle \ell_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx.$$

Egy $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ függvény Fourier-transzformáltja:

$$\tilde{f}(p) = (Ff)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\mathrm{i}px}dx.$$

$$\text{Gauss-integrál}: \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx+c}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}+c}.$$

Egy $\ell \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ mérsékelt disztribúció Fourier-transzformáltjának értéke egy φ tesztfüggvényen:

$$\langle F\ell, \varphi \rangle = \langle \ell, F\varphi \rangle.$$