Matematikai módszerek a fizikában 2
4. Feladatsor: Disztribúciók

Készítette: Görbe Tamás Ferenc *Utolsó módosítás: 2017. október 5.*

1. Feladat. Tekintsünk egy tetszőleges egyváltozós, nemnulla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tesztfüggvényt, amire $\varphi(0) \neq 0$. Döntsük el, hogy a φ segítségével definiált alábbi $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tesztfüggvény sorozatok közül melyek konvergálnak a konstans nulla függvényhez:

(a) $\varphi_m(x) = \dfrac{\varphi(x-m)}{m}$; (b) $\varphi_m(x) = \dfrac{\varphi(mx)}{m^p}$, ahol p rögzített pozitív egész; (c) $\varphi_m(x) = \dfrac{\varphi(mx)}{e^m}$.

2. Feladat. Tetszőleges $a < x_0 < b$ számok esetén az $\int_a^b \frac{1}{x-x_0}dx$ integrál divergens. Mutassuk meg, hogy

$$\mathrm{PV}\int_a^b \frac{1}{x-x_0}dx = \log\frac{b-x_0}{x_0-a}.$$

3. Feladat. Számítsuk ki a $\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx$ főértéket, az alábbi függvényekre

(a) $\varphi(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$; (b) $\varphi(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

4. Feladat. Keressünk egy hatodfokú $p(x)$ polinomot, amelyre $p(x_0) = p'(x_0) = p''(x_0) = 0$, ha $x_0 = \pm 1$ és $\int_{-1}^{1} p(x)dx = 1$. Ennek segítségével definiáljuk a $\varphi(x)$ függvényt úgy, hogy $\varphi(x) = p(x)$, ha $|x| \leq 1$ és $\varphi(x) = 0$, ha $|x| > 1$. Igazoljuk, hogy φ kétszeresen folytonosan deriválható! Rajzoljuk meg φ grafikonját!

5. Feladat. Igazoljuk, hogy $a > 0$ esetén

(a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/(2a)}dx = (2\pi a)^{\frac{n}{2}}$; (b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 e^{-|x|^2/(2a)}dx = an(2\pi a)^{\frac{n}{2}}$.

6. Feladat. Tekintsük a kétváltozós tesztfüggvények $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ terének alábbi lineáris transzformációját $R_\theta\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, $\varphi \mapsto R_\theta\varphi$, ahol

$$(R_\theta\varphi)(x,y) = \varphi(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta).$$

Határozzuk meg az $(R_\theta)^\top\ell$ disztribúciót tetszőleges $\ell \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ esetén! Speciális esetként adjuk meg az $(R_\theta)^\top\ell$ disztribúciót, ha $\theta = \pi/2$ és $\langle \ell, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,0)dx$.

7. Feladat. Az előző feladat jelöléseit alkalmazva nevezzünk egy $\ell \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ disztribúciót *radiálisnak*, ha $(R_\theta)^\top\ell$ minden θ esetén. Radiális-e a síkbeli Dirac-delta? Mutassuk meg, hogy egy tetszőleges $\ell \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ disztribúcióból az alábbi képlettel származtatott $\ell_r \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ disztribúció radiális:

$$\langle \ell_r, \varphi\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \langle (R_\theta)^\top\ell, \varphi\rangle d\theta.$$

8. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $\ell \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ egy radiális disztribúció, akkor

$$x\frac{\partial\ell}{\partial y} - y\frac{\partial\ell}{\partial x} = 0$$

9. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely $\ell \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúció és $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tesztfüggvény esetén

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f\ell) = \frac{\partial f}{\partial x_j}\ell + f\frac{\partial\ell}{\partial x_j}.$$

10. Feladat. Igazoljuk az alábbi azonosságokat

(a) $\delta(-x) = \delta(x)$; (b) $\delta(ax) = \dfrac{\delta(x)}{|a|}$; (c) $\delta\big((x-x_1)(x-x_2)\big) = \dfrac{\delta(x-x_1) + \delta(x-x_2)}{|x_1-x_2|}$;

(d) $x\delta'(x) = -\delta(x)$.