Matematikai módszerek a fizikában 2
2. Feladatsor: Tenzoralgebra

Készítette: Görbe Tamás Ferenc *Utolsó módosítás: 2017. szeptember 20.*

1. Feladat. Határozzuk meg a $\mathbf{T}^\top \boldsymbol{v}$ vektor Descartes-féle komponenseit, ha $\boldsymbol{v} \sim (v_x, v_y, v_z)$ és

(a) $\mathbf{T}\boldsymbol{v} \sim (-v_y, v_x, 0)$; (b) $\mathbf{T}\boldsymbol{v} \sim (v_x + 2v_y + 3v_z, 2v_x + 3v_y + 4v_z, 3v_x + 4v_y + 5v_z)$;

(c) $\mathbf{T}\boldsymbol{v} \sim (-2v_x + 3v_z, -v_z, v_x - 2v_y)$; (d) $\mathbf{T}\boldsymbol{v} \sim (v_y - v_z, -v_x + v_z, v_x - v_y)$.

2. Feladat. Határozzuk meg az előző feladatban szereplő $\mathbf{T}, \mathbf{T}^\top$ másodrendű tenzorok komponenseit! Döntsük el, ezek közül melyek a szimmetrikus/antiszimmetrikus tenzorok! Amelyik egyik sem, azt bontsuk fel szimmetrikus és antiszimmetrikus tenzorok összegére!

3. Feladat. Tekintsünk egy $\boldsymbol{u} \sim (u_x, u_y, u_z)$ vektort és segítségével definiáljuk az $\boldsymbol{u}\times$ másodrendű tenzort mint az $\boldsymbol{u}$-val képzett vektoriális szorzást. Határozzuk meg az $\boldsymbol{u}\times$ másodrendű tenzor Descartes-komponenseit! Milyen az így definiált tenzor? Szimmetrikus, antiszimmetrikus, vagy egyik sem?

4. Feladat. Igazoljuk, hogy a háromdimenziós vektorok terében $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \iff \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}$, $\forall \boldsymbol{a}$.

5. Feladat. Legyen $\mathbf{A}$ egy antiszimmetrikus másodrendű tenzor.

(a) Írjuk fel azt az $\boldsymbol{\omega}$ vektort, amelyre $\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$ minden $\boldsymbol{v}$ esetén!

(b) Igazoljuk, hogy adott $\mathbf{A}$-hoz csak egy ilyen $\boldsymbol{\omega}$ vektor létezik!

(c) Mutassuk meg, hogy $\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{v} = 0$ minden $\boldsymbol{v}$ vektor esetén!

(d) Lássuk be, hogy $\mathbf{A}\boldsymbol{\omega} = 0$!

6. Feladat. Számítsuk ki az $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ vektorok diadikus szorzatának Descartes-komponenseit, ha

(a) $\boldsymbol{u} \sim (1,0,0)$, $\boldsymbol{v} \sim (0,1,0)$; (b) $\boldsymbol{u} \sim (1,1,1)$, $\boldsymbol{v} \sim (1,1,0)$; (c) $\boldsymbol{u} \sim (1,2,3)$, $\boldsymbol{v} \sim (-1,0,1)$.

7. Feladat. Adjuk meg az $\boldsymbol{u}$ vektor által meghatározott egyenesre vetítő tenzor Descartes-komponenseit

(a) $\boldsymbol{u} \sim (1,1,0)$; (b) $\boldsymbol{u} \sim (0,1,2)$; (c) $\boldsymbol{u} \sim (-1,1,-1)$; (d) $\boldsymbol{u} \sim (3,-2,1)$; (e) $\boldsymbol{u} \sim (0,1,2)$.

8. Feladat. Az $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ vektorok diadikus szorzatának nyoma $\mathrm{tr}(\boldsymbol{uv}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$. Határozzuk meg a 6. Feladatban kiszámolt diadikus szorzatok nyomát!

9. Feladat. Az $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ másodrendű tenzorok $\mathbf{AB}$ szorzatát $(\mathbf{AB})\boldsymbol{v} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\boldsymbol{v})$ definiálja. Az 5. Feladat eredményeinek felhasználásával igazoljuk, hogy $\mathbf{A}^\top\mathbf{A} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{1} - \boldsymbol{\omega\omega}$ és $|\boldsymbol{\omega}|^2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})$!

10. Feladat. Határozzuk meg az 1. Feladat (c) részében szereplő másodrendű tenzor inverzét!