Matematikai segédanyag a K801 és a K831 kurzusokhoz

Az alábbi rövid összefoglaló Bronstejn, Szemengyajev, Musiol, Mühlig **Matematikai kézikönyv** című könyve alapján készült.

Összegek felírása:

$$\sum_{i=k}^{v} f(x_i) = f(x_k) + f(x_{k+1}) + ... + f(x_v)$$

Szorzatok felírása:

$$\prod_{i=k}^{v} f(x_i) = f(x_k) \cdot f(x_{k+1}) \cdot .... \cdot f(x_v)$$

Kitevők és hatványok: Általános leírás: a^x, ahol a az alap és x a kitevő. Pl. $10^2, e^{-4,5}, 2^{3,7}$

Hatványműveletek:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\quad 10^{-3,7} \cdot 10^{4,6} = 10^{0,9}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $\quad (10^2)^4 = 10^8$

Logaritmusok: Valamilyen x szám (x>0) b alapú (b>0 és $b \neq 1$) logaritmusán azt az u kitevőt értjük, amelyre a b alapot hatványozni kell, hogy az x számot kapjuk, azaz képletben $u = \log_b x$ vagy $x = b^u$.

Műveletek:

$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$ $\quad \lg(1,32x) = \lg 1,32 + \lg x$

$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$ $\quad \ln(A/T) = \ln A - \ln T$

Az $y = mx + b$ egyenlet Az y-t x függvényében ábrázolva egyenest kapunk, melynek meredeksége m és tengelymetszete b.

Az $ax^2 + bx + c = 0$ alakú másodfokú egyenlet megoldása:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Differenciahányados, differenciálhányados:

Egyváltozós függvények

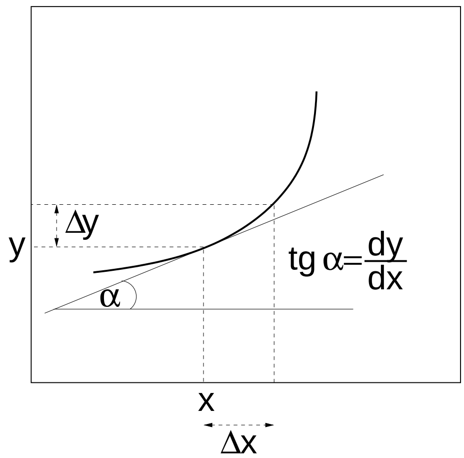
Egy tetszőleges y=f(x) függvény differenciahányadosa:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Ha Δx értékét tetszőleges kicsire csökkentjük, akkor a kapott érték az adott függvény differenciálhányadosa:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d f(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Geometriailag a derivált a görbe adott x pontjához húzott érintő meredeksége: $\frac{dy}{dx} = \text{tg}\alpha$.



Differenciálás szabályai:

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \qquad \frac{d\ln(ax)}{dx} = \frac{a}{x}$$

$$\frac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax} \qquad \frac{d(f(x)g(x))}{dx} = f(x)\frac{d(g(x))}{dx} + g(x)\frac{d(f(x))}{dx}$$

Az $y = f(x)$ függvény differenciálja (dy): $dy = f'(x)dx$

Többváltozós függvények

- Parciális derivált
  Egy tetszőleges $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ függvény x_i szerinti parciális deriváltja az alábbi differenciálhányados

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)_{x_j(j\neq i)} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_i + \Delta x, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)}{\Delta x},$$

  ahol az x_i változón kívüli összes többi változó értéke állandó marad.
  Geometriailag a differenciálhányados az adott x_i-irányba eső meredekséget mutatja meg.
  Példa: $z = 5x^3 + 4xy^2 + yx^5$, melyre

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = 15x^2 + 4y^2 + 5yx^4$$

  illetve

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_z = 8xy + x^5$$

- Teljes differenciál

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n$$

  Az előző példára a teljes differenciál:

$$dz = (15x^2 + 4y^2 + 5yx^4)dx + (8xy + x^5)dy$$

Egyváltozós függvények Taylor-közelítése: Ha az $y = f(x)$ függvény egy $[x_0, x_0 + h]$ intervallumban folytonos és léteznek a magasabb rendű deriváltjai is akkor felírható az alábbi egyenlet, azaz az $y = f(x)$ függvény közelítése az x_0 helyen

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0 + Oh), \quad 0 < O < 1$$

Példa: ln(1-x) függvény közelítése a 0 helyen (x kicsi)

$$\ln(1-x) = \ln(1) + x\frac{d\ln(1-x)}{dx}|_{x=0 \text{ helyen}} + ... = x\left(-\frac{1}{1-x}\right)|_{x=0 \text{ helyen}} + \ldots \approx -x$$

vagy

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Integrálás: Az integrálás a differenciálás megfordítottja: a differenciálásnál az $f(x)$ függvényhez kell megkeresni az $f'(x)$ deriváltat, addig az integrálás során az adott $f'(x)$ függvényhez kell megkeresni azt a függvényt, melynek deriváltja az adott $f'(x)$ függvény. Egyértelműen nem lehet meghatározni a keresett függvényt, mivel egy állandó deriváltja nulla, ezért a folyamatot határozatlan integrálásnak, a függvényt pedig határozatlan integrálnak nevezik.

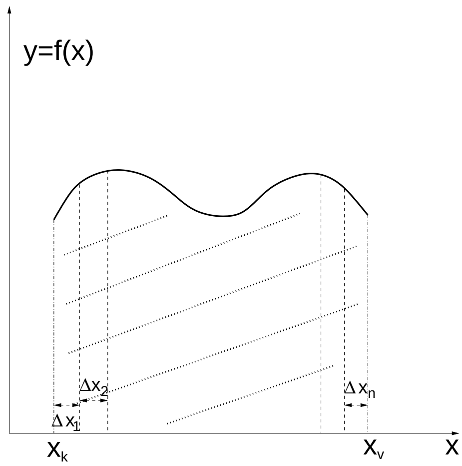
$$\int f'(x)dx = f(x) + C \quad \text{ahol } C \text{ állandó}$$

Egyszerűbb integálok:

$$\begin{aligned}
\int x^n dx &= \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \\
\int \frac{1}{x} dx &= \ln x + C \\
\int e^{ax} dx &= \frac{e^{ax}}{a} + C
\end{aligned}$$

Határozott integrálok:
Az adott $y = f(x)$ korlátos függvénynek a $[x_k, x_v]$ zárt intervallumon vett határozott integrálja egy szám, amely a következő összeg határértéke:

$$\int_{x_k}^{x_v} f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0,\ n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i$$



azaz a görbe alatti terület.
Ha az $f(x)$ integrandus a $[x_k, x_v]$ intervallumon folytonos és egy primitív függvénye az F(x) függvény, akkor

$$\int_{x_k}^{x_v} f(x)dx = \int_{x_k}^{x_v} F'(x)dx = F(x)|_{x_k}^{x_v} = F(x_v) - F(x_k)$$

Integrálás szabályai:

$$\int_{x_v}^{x_k} dx = x|_{x_k}^{x_v} = x_v - x_k$$

$$\int_{x_v}^{x_k} \frac{dx}{x} = \ln|x||_{x_k}^{x_v} = \ln|x_v| - \ln|x_k| = \ln\left|\frac{x_v}{x_k}\right|$$