Óravázlatok: Matematika 2.
Tartományintegrálok

Bartha Ferenc*
Szegedi Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék
készültség: April 23, 2003
(http://www.jate.u-szeged.hu/~barthaf/oktatas.htm)

Contents

1. A KETTŐS INTEGRÁL

1.1. Téglalapon bevezetve

Legyen az $f(x, y)$ függvény értelmezett a T

$$T = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b\ ,\ c \leq y \leq d\} \tag{1.1}$$

téglalapon. A T tartományt osszuk fel az x- és az y-tengelyekkel párhuzamos vonalak sokaságával. Ezt a hálót a T egy beosztásának hívjuk, ez a téglalapot n darab kisebb téglalapra vágja. Valamilyen módon számozzuk meg ezeket az

*Electronic address: barthaf@physx.u-szeged.hu

elemi T_k téglákat $k = 1$-től n-ig. A k-adik területe $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$. Mindegyik, téglából válasszunk ki egy tetszőleges $(x_k, y_k) \in T_k$ pontot és készítsük el az

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\ \Delta A_k \tag{1.2}$$

részletösszeget.

Tétel 1 *Ha az $f(x, y)$ függvény folytonos a T tartományon, akkor bárhogyan is finomítjuk a beosztást és bárhogyan is választjuk ki az elemi téglákban a $\mathbf{c}_k$ pontot, ha Δx_k és Δy_k nullához tart, akkor a*

$$\lim_{\Delta x\ ,\ \Delta y\ \to 0} S_n \tag{1.3}$$

határérték létezik.

Definíció 2 *Az iménti határértéket az f függvénynek a T tartományra vett kettős integráljának nevezzük, jelölése:*

$$\iint_T f(x, y)\ dA\ =\ \lim_{\Delta x\ ,\ \Delta y\ \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\ \Delta A_k \tag{1.4}$$

Megjegyzés 3 *A kettős integrált nemcsak folytonos függvényekre értelmezzük. Ha valamely függvényre teljesül, hogy az S_n részletösszegek sorozata a beosztások bármilyen finomításával konvergens, akkor a függvény kettős integrálja értelmes.*

1.2. Tulajdonságai

Az integrálok kiszámításánál hasznosak az alábbi tulajdonságok

$$\iint_T k \cdot f(x, y)\ dA\ = k \cdot \iint_T f(x, y)\ dA \qquad k \text{ tetszőleges szám} \tag{1.5}$$

$$\iint_T [f(x, y) \pm g(x, y)]\ dA\ = \iint_T f(x, y)\ dA\ \pm\ \iint_T g(x, y)\ dA \tag{1.6}$$

$$\iint_T f(x, y)\ dA\ \geqq 0 \ \text{ ha } \ f(x, y) \geqq 0\ \ T\text{-ben} \tag{1.7}$$

$$\iint_T f(x, y)\ dA\ \geqq \iint_T g(x, y)\ dA \ \text{ ha } \ f(x, y) \geqq g(x, y)\ \ T\text{-ben} \tag{1.8}$$

$$\iint_T f(x, y)\ dA\ = \iint_{T_1} f(x, y)\ dA\ + \iint_{T_2} f(x, y)\ dA \ \text{ ahol } T = T_1 \cup T_2 \ \text{ és } \ T_1 \cap T_1 = 0 \tag{1.9}$$

1.3. Geometriai jelentése

Ha az $f(x, y)$ függvény nem negatív a T tartományon, akkor a kettős integrálhoz szemléletes jelentést társíthatunk. Tekintsük a függvénynek $z = f(x, y)$ felülettel való ábrázolását, a kettős integrál annak az egyenes hasábszerű H testnek a térfogatát adja meg, melyet alulról a T tégla határol, felülről pedig a $z = f(x, y)$ felület. Láthatóan ugyanis T_k területének és a $z_k = f(x_k, y_k)$ értéknek a

$$f(x_k, y_k)\ \Delta A_k \tag{1.10}$$

szorzata egy olyan elemi egyenes hasáb térfogatát adja amelyiket alulról T_k téglalap, felülről pedig közelítőleg a $z = f(x, y)$ felület határol. Azt várjuk, hogy ezen elemi hasábok térfogatának az összege a beosztás finomításával a teljes T tartomány fölötti ”szokványos” térfogatot egyre jobban közelíti. Pontosabban a kérdéses térfogatot ezzel fogjuk definiálni, azaz

Definíció 4 *A $z = f(x, y)$ felület és a T tartomány közötti egyenes hasáb térfogata*

$$V = \iint_T f(x, y)\ dA \tag{1.11}$$

1.4. Kiszámítása

A kettős integrál kiszámítása a részletösszegek határértékeként elvileg lehetséges, de nagyon körülményes lehet. A térfogattal való előbbi kapcsolata elvezet bennünket egy praktikusabb számolási eljáráshoz.

Szeleteljük fel a H hasábot az (x,z) síkkal párhuzamos (vékony) $y = y_i$, $i = 1,2,..,m$ síkokkal. Egy ilyen szelet térfogata közelítőleg

$$v_i = A(y_i) \cdot \Delta y_i \tag{1.12}$$

ahol $A(y)$ a megfelelő szelet területe. Persze ez a terület kiszámolható, mint a

$$h(x) = f(x,y) \tag{1.13}$$

függvény grafikonja alatti terület

$$A(y) = \int_a^b h(x)\ dx\ = \int_a^b f(x,y)\ dx \tag{1.14}$$

A szeletek összesített térfogata

$$V_m = \sum_{i=1}^{m} v_i = \sum_{i=1}^{m} A(y_i) \cdot \Delta y_i \tag{1.15}$$

annál jobban közelíti a kérdéses térfogatot, minél vékonyabb szelteket vágtunk, azaz minél sűrűbb az y-tengelyen a beosztás. Láthatóan V_m egy integrál közelítő összege, a beosztás finomításával tehát

$$V = \lim_{\Delta y\ \to 0} V_m = \int_c^d A(y)\ dy \tag{1.16}$$

Oda jutottunk, hogy

$$V = \iint_T f(x,y)\ dA\ = \int_c^d A(y)\ dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\ dx \right]\ dy \tag{1.17}$$

Hasonlóan, most az (y,z) síkkal párhuzamos $x = x_i$ síkokkal szeletelve a hasábot kapnánk, hogy

$$V = \iint_T f(x,y)\ dA\ = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\ dy \right]\ dx \tag{1.18}$$

Szavakba öntve az eredményt: A kettős integrál kiszámítható két egymás után elvégzett közönséges integrálás során. A **szukcesszív** (˜ *egymást követő*) integráláskor előbb az egyik változót rögzítettnek gondolva a másik változóban integrálunk a megfelelő határok között, majd az eredményt integráljuk a maradék változó szerint. Az integrálás sorrendje mindegy.

A módszer bevezetéséhez nemnegatív függvényekre a H hasáb "szemléletes" térfogatának a kiszámítását használtuk fel. Az állítás ennél általánosabb esetre is bizonyítható:

Tétel 5 *(FUBINI) Ha $f(x,y)$ tetszőleges folytonos függvény a $T = \{(x,y) \mid a \le x \le b\ ,\ c \le y \le d\}$ téglalap alakú tartományon, akkor*

$$\iint_T f(x,y)\ dA\ = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\ dx\ dy\ = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dy\ dx \tag{1.19}$$

Az előző kijelentésben elhagytuk a zárójeleket. Megállapodunk abban, hogy az ilyen módon felírt többszörös integrálokat úgy olvassuk, hogy mindig a legbelső integrálást végezzük először, és kifele haladunk az integrál jelekben balra, a differencia jelekben jobbra.

Példa 6 *Legyen* $f(x,y) = 1 - 6x^2y$ *és* $T:\ 0 \le x \le 2\ ,\ -1 \le y \le +1$

- $\int_{-1}^{+1} \left[\int_0^2 (1 - 6x^2y)\ dx \right]\ dy = \int_{-1}^{+1} \left[x - 6\frac{x^3}{3}y \right]_{x=0}^{x=2}\ dy = \int_{-1}^{+1} \left(2 - 6\frac{2^3}{3}y \right)\ dy = \int_{-1}^{+1} (2 - 16y)\ dy = 4.$
- $\int_0^2 \left[\int_{-1}^{+1} (1 - 6x^2y)\ dy \right]\ dx = \int_0^2 (2)\ dx = 4.$, mint az előző.

1.5. Nem téglalap, de korlátos "mérhető" tartomány

Ha a kétdimenziós D tartomány nem téglalap, akkor is felszeletelhetjük az előbbi módon, azaz behálózzuk az x- és az y-tengelyekkel párhuzamos vonalak sokaságával Az így kapott kis T_k téglákaból csak azokat vegyük figyelembe és számozzuk be valahogy $k = 1$-től n-ig, melyek teljes egészükben D-ben vannak. Minden ilyen téglából kiválasztva egy $(x_k, y_k) \in T_k$ pontot készítsük el az

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\ \Delta A_k \tag{1.20}$$

összeget. A lényeges különbség a korábbi (1.2) összegünkhöz képest, hogy a $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$ területű elemi téglalapok együttese most nem fedi le teljesen a D tartományt. Nyilvánvaló, hogy a beosztó háló finomításával D egyre nagyobb részét lefedjük. Ha a D tartomány határoló görbéi elegendően simák, akkor

$$\lim_{\Delta x\ ,\ \Delta y\ \to 0}\ \sum_{k=1}^{n}\ \Delta A_k \tag{1.21}$$

létezik és a D területével egyezik meg. Ilyen "mérhető" tartományokon folytonos $f(x, y)$ függvényekre létezik $lim\,(S_n)$, és azt:

Definíció 7 *Az f függvénynek a D tartományra vett kettős integráljának nevezzük, jelölése:*

$$\iint_D f(x, y)\ dA\ =\ \lim_{\Delta x\ ,\ \Delta y\ \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\ \Delta A_k \tag{1.22}$$

Megjegyzés 8 *A kettős integrál létezéséhez kevesebb feltétel is elegendő, de ezzel most nem foglalkozunk.*

A kettős integrál geometriai jelentése hasonló a téglalap alakú tartományoknál megfogalmazottéval. Ha az $f(x, y)$ függvény nem negatív D-n, akkor, a kettős integrál annak az egyenes hengerszerű H testnek a térfogatát adja meg, melyet alulról D, felülről a $z = f(x, y)$ felület határol.

$$V = \iint_D f(x, y)\ dA \tag{1.23}$$

1.6. Szukcesszív integrálás általános tartományon

Legyen a D tartomány olyan, hogy

$$a \le x \le b \quad \text{és} \quad g_1(x) \le y \le g_2(x) \tag{1.24}$$

azaz x-ben minden pontja a és b közé esik, a határoló görbéi pedig $y = g_1(x)$ és $y = g_2(x)$. Az x-tengelyre merőleges síkokkal szeletelve a H testet a szeletek térfogata

$$v_i = A\,(x_i) \cdot \Delta x_i \tag{1.25}$$

ahol

$$A\,(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\ dy \tag{1.26}$$

A szeletek összesített térfogata határátmenetben

$$V = \lim_{\Delta x\ \to 0} \sum_{i=1}^{m} A\,(x_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b A(x)\ dx \tag{1.27}$$

A kettős integrál kiszámításához tehát kapjuk, hogy

$$V = \iint_T f(x, y)\ dA\ = \int_a^b A(x)\ dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\ dy \right]\ dx \tag{1.28}$$

Az eredmény általánosítása:

Tétel 9 *(FUBINI) $f(x,y)$ tetszőleges folytonos függvény a D tartományon,*
1) ha D olyan, hogy $a \leq x \leq b$ és $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ ahol g_1 és g_2 folytonos görbék, akkor

$$\iint_D f(x,y)\ dA\ = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\ dy\right]\ dx \tag{1.29}$$

2) ha D olyan, hogy $c \leq y \leq d$ és $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$ ahol h_1 és h_2 folytonos görbék, akkor

$$\iint_D f(x,y)\ dA\ = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\ dx\right]\ dy \tag{1.30}$$

Az integrálás sorrendjét jelző belső zárójeleket megint megspórolhatjuk.

A szukcesszív integrálás másik szokásos felírása, hogy előre felsoroljuk, hogy milyen határok között és milyen változóban kell integrálni, majd leírjuk az integrálandó függvényt

$$\int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\ dy\right]\ dx = \int_a^b dx\ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\ dy \cdot \{f(x,y)\} \tag{1.31}$$

$$\int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\ dx\right]\ dy = \int_c^d dy\ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)}\ dx \cdot \{f(x,y)\} \tag{1.32}$$

Ez esetben a jobbra álló integrálást az őt balról megelőző(ek) előtt kell elvégezni.

Példa 10 *Legyen $f(x,y) = 3 - x - y$ és D a $(0,0)\,,(1,0)$ és $(1,1)$ csúcspontokkal adott háromszögletű tartomány.*

- $0 \leq x \leq 1$ és $g_1(x):\ y = 0$ továbbá $g_2(x):\ y = x$
  Ekkor $\displaystyle\iint_D f(x,y)\ dA\ = \int_0^1 \left[\int_0^x (3-x-y)\ dy\right]\ dx = \int_0^1 \left[3y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x}\ dx = \int_0^1 \left(3x - x^2 - \frac{x^2}{2}\right)\ dx = 1$
- $0 \leq y \leq 1$ és $h_1(y):\ x = y$ továbbá $h_2(y):\ x = 1$
  Ekkor $\displaystyle\iint_D f(x,y)\ dA\ = \int_0^1 \left[\int_y^1 (3-x-y)\ dx\right]\ dy = \int_0^1 \left[3x - \frac{x^2}{2} - yx\right]_{x=y}^{x=1}\ dy = \int_0^1 \left(\frac{5}{2} - 4y + \frac{3}{2}y^2\right)\ dy = 1$

Az integrálásokat mindkét sorrendben elvégezhetjük, az eredmény ugyanaz. Nem ugyanaz viszont a befektetett munka, ugyanis az egyik sorrendben az integrálás "nagyon nehéz" lehet, míg esetleg a másikban egyszerű.

Példa 11 *Az előbbi példa háromszög alakú tartományán integráljuk az $f(x,y) = \frac{sin(x)}{x}$ (y-ban konstans) függvényt.*

- $\int_0^1 \left[\int_0^x \frac{sin(x)}{x}\ dy\right]\ dx = \int_0^1 \left[\frac{sin(x)}{x} y\right]_{y=0}^{y=x}\ dx = \int_0^1 sin(x)\ dx = 1 - cos(1)$
- $\int_0^1 \left[\int_y^1 \frac{sin(x)}{x}\ dx\right]\ dy = \int_0^1 [?????]_{x=y}^{x=1}\ dy = 1 - cos(1)$, ahol a $\int_y^1 \frac{sin(x)}{x}\ dx$ integrált nem tudjuk elemi függvényekkel felírni

1.7. Tartományok és integrálási határok

A kettős integrál szukcesszív kiszámolásakor a tartomány határaitól függő integrálási határok megállapítására az alábbi szabály javasolt. Példaként tekintsük az $x + y = 1$ egyenes és az $x^2 + y^2 = 1$ egységsugarú kör által határolt tartományt az első síknegyedben.

- Rajzoljuk le a tartományt és állapítsuk meg valamelyik tengelyen a maximális kiterjedését. Esetünkben például

$$0 \leq x \leq 1 \tag{1.33}$$

- Egy megengedett x-nél húzzunk egy egyenest y-tengellyel párhuzamosan és olvassuk le, hogy az egyenes hol lép be a tartományba, és hogy hol lép ki. Esetünkben

$$1 - x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \tag{1.34}$$

- Tehát

$$x = 0..1 \quad \text{és} \quad y = (1-x)\,..\sqrt{1-x^2} \tag{1.35}$$

és

$$\iint_D f(x,y)\ dA = \int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\ dy\ dx \tag{1.36}$$

Az eljárást az y tengelyen mért maximális kiterjedéssel indítva hasonlóan kapjuk, hogy

$$y = 0..1 \quad \text{és} \quad x = (1-y)\,..\sqrt{1-y^2} \tag{1.37}$$

és

$$\iint_D f(x,y)\ dA = \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\ dx\ dy \tag{1.38}$$

Példa 12 *Fordítsuk meg az integrálás sorrendjét az alábbi integrálban*

$$I = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x,y)\ dy\ dx \tag{1.39}$$

A D tartományt felrajzoljuk, ez az $y = 2x$ és az $y = x^2$ határológörbék által jellemzett síkidom. Látható, hogy

$$y = 0..4 \quad \text{és} \quad x = \frac{y}{2}..\sqrt{y} \quad \text{azaz } I = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\ dx\ dy \tag{1.40}$$

Példa 13 *Megfordítandó és kiszámolandó*

$$I = \int_0^3 \int_{\sqrt{x/3}}^1 e^{y^3}\ dy\ dx \tag{1.41}$$

A tartomány az első síknegyedben van, ott az $y = 1$ és az $y = \sqrt{x/3}$ görbék határolják. Amúgy nézve a határgörbék $x = 0$ és az $x = 3y^2$ és

$$y = 0..1 \quad \text{és} \quad x = 0..3y^2 \quad \text{azaz } I = \int_0^1 \int_0^{3y^2} e^{y^3}\ dx\ dy = \int_0^1 3y^2 e^{y^3}\ dy = e - 1 \tag{1.42}$$

Gyakorló feladat 14 *Számítsuk ki az alábbi integrálokat. Milyen tartományra vonatkoznak az integrálok?*

$$\int_0^3 \int_0^2 (4-y^2)\ dy\ dx \quad , \quad \int_0^\pi \int_0^x x \cdot sin\,(y)\ dy\ dx \quad , \quad \int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 \cdot e^{xy}\ dx\ dy \tag{1.43}$$

Gyakorló feladat 15 *Határozzuk meg az* $f = x^2 + y^2$ *függvény integrálját a* $(0,0)\,,(1,0)$ *és* $(0,1)$ *csúcsokkal adott háromszögön.*

Gyakorló feladat 16 *Fordítsuk meg az integrálás sorrendjét az alábbi integrálokban*

$$\int_0^2 \int_0^{4-y^2} y\ dy\ dx \quad \text{és} \quad \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} 6x\ dy\ dx \tag{1.44}$$

1.8. ::::::: Innentől hiányos ::::::

1.9. Integrálás síkbeli polárkoordinátákban

Megmutatjuk, hogy

$$dA = dx\ dy = r\ dr\ d\varphi \tag{1.45}$$

és a kettős integrált a

$$\iint_D f(x,y)\ dA \ = \int \int f(x\,(r,\varphi)\,, y\,(r,\varphi))\ r\ dr\ d\varphi \tag{1.46}$$

módon alakíthatjuk szukcesszív integrálásokká. Az utóbbi integrálásokat tetszőleges sorrendben elvégezhetjük, a közönséges határozott integrálok határait a tartomány alakjának megfelelően választjuk.

2. A HÁRMAS INTEGRÁL

Példa 17 *A 3D térfogatot a $\rho = 3cos(\varphi)$ henger, a $z = 0$ és a $z = -y$ síkok határolják. mekkora a térfogata?*

A negyedik síknegyedben levő alakzatot választva

$$\varphi = \frac{3}{2}\pi..2\pi \ , \ \rho = 0..3cos(\varphi) \text{ és } z = 0.. - \rho \cdot sin(\varphi) \text{ miatt } V = \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \int_0^{3cos(\varphi)} \int_0^{-\rho\cdot sin(\varphi)} \rho \ dz \ d\rho \ d\varphi \tag{2.1}$$

$$V = -\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \int_0^{3cos(\varphi)} \rho^2 \cdot sin(\varphi) \ d\rho \ d\varphi = -9 \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} cos^3(\varphi) \cdot sin(\varphi) \ d\varphi = 9 \int_0^1 u^3 \ du = \frac{9}{4} \tag{2.2}$$

Példa 18 *Felülről $z = 4 - 4(x^2 + y^2)$ alulról $z = \left(x^2 + y^2\right)^2 - 1$, mi a térfogat?*

$z = 4 - 4(x^2 + y^2) = \left(x^2 + y^2\right)^2 - 1 \quad \Rightarrow$ láthatóan $x^2 + y^2 = 1$ a vetülete az (x, y) síkra.

$$\varphi = 0..2\pi \ , \ \rho = 0..1 \text{ és } z = \left(\rho^4 - 1\right)..4\left(1 - \rho^2\right) \text{ miatt } V = 2\pi \int_0^1 \int_{\rho^4-1}^{4\left(1-\rho^2\right)} \rho \ dz \ d\rho \tag{2.3}$$

$$V = 2\pi \int_0^1 \left(5 - 4\rho^2 - \rho^4\right) \rho \ d\rho = 2\pi \left(\frac{5}{2} - \frac{4}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{8}{3}\pi \tag{2.4}$$

Példa 19 *Számoljuk ki a gömb térfogatát Descartes-, henger- és gömbi koordinátákban!*

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R r^2 \cdot sin(\vartheta) \ dr \ d\vartheta \ d\varphi = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4\pi}{3} R^3 \tag{2.5}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{+\sqrt{R^2-\rho^2}} \rho \ dz \ d\rho \ d\varphi = 2\pi \int_0^R 2\rho\sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho \ = 2\pi \left[-\frac{2}{3}\left(R^2 - \rho^2\right)^{3/2} \right]_0^R = \frac{4\pi}{3} R^3 \tag{2.6}$$

$$= \int_{-R}^{+R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \ dy \ dx = 8 \int_0^{+R} \int_0^{+\sqrt{R^2-x^2}} \int_0^{+\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \ dy \ dx = ... \tag{2.7}$$

3. TÖBBSZÖRÖS INTEGRÁLOK SZÁMÍTÁSA INTEGRÁL-TRANSZFORMÁCIÓVAL

Példa 20 *Helyettesítéssel számoljuk ki*

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x + y}\,(y - 2x)^2 \ dy \ dx \tag{3.1}$$

Legyen

$$u = x + y \ , \ v = y - 2x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}(u - v) \ , \ y = \frac{1}{3}(2u + v) \quad \Rightarrow \quad J = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \tag{3.2}$$

A határoló görbék a két síkon

$$\begin{array}{rcl} x + y = 1 & \Rightarrow & u = 1 \\ x = 0 & \Rightarrow & u = v \\ y = 0 & \Rightarrow & 2u + v = 0 \end{array} \tag{3.3}$$

amiből az integrál

$$I = \int_0^1 \int_{-2u}^{u} \sqrt{u} \cdot v^2 \cdot \frac{1}{3} \ dv \ du = \frac{1}{3} \int_0^1 \sqrt{u} \left[\frac{v^3}{3}\right]_{-2u}^{u} du = \frac{1}{9} \int_0^1 \sqrt{u}\left(u^3 + 8u^3\right) \ du = \int_0^1 u^{7/2} \ du = \frac{2}{9} \tag{3.4}$$

Példa 21 *Helyettesítéssel*

$$I = \int_0^3 \int_0^4 \int_{y/2}^{y/2+1} \left(\frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3} \right) \; dx \; dy \; dz \tag{3.5}$$

Legyen

$$u = \frac{2x-y}{2} \; , \; v = \frac{y}{2} \; , w = \frac{z}{3} \quad \Rightarrow \quad x = u + v \; , \; y = 2v \; , \; z = 3w \quad \Rightarrow \quad J = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \tag{3.6}$$

A határoló felületek a két térben

$$\begin{array}{lclcl} x = \frac{y}{2} & \Rightarrow & u + v = v & \Rightarrow u = 0 \\ x = \frac{y}{2} + 1 & \Rightarrow & u + v = v + 1 & \Rightarrow u = 1 \\ y = 0 & \Rightarrow & 2v = 0 & \Rightarrow v = 0 \\ y = 4 & \Rightarrow & 2v = 4 & \Rightarrow v = 2 \\ z = 0 & \Rightarrow & 3w = 0 & \Rightarrow w = 0 \\ z = 3 & \Rightarrow & 3w = 3 & \Rightarrow w = 1 \end{array} \tag{3.7}$$

amiből az integrál

$$I = \int_0^1 du \int_0^2 dv \int_0^1 dw \; \{u + w\} \cdot 6 = 6 \int_0^1 du \int_0^2 dv \; \left\{ u + \frac{1}{2} \right\} = 6 \int_0^1 du \; \{2u + 1\} = 6 \left\{ 2\frac{1}{2} + 1 \right\} = 12 \tag{3.8}$$

Példa 22 *Mekkora az*

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \tag{3.9}$$

ellipszoid térfogata?

Elliptikus koordinátákat választunk

$$u = \frac{x}{a} \; , \; v = \frac{y}{b} \; , w = \frac{z}{c} \quad \Rightarrow \quad x = au \; , \; y = bv \; , \; z = cw \quad \Rightarrow \quad J = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc \tag{3.10}$$

A tartomány

$$u^2 + v^2 + w^2 \leq 1 \quad = \quad G \tag{3.11}$$

az egységsugarú gömb, tehát

$$V = \iiint_G |abc| \; dV \,(u, v, w) = \frac{4\pi}{3} \, |abc| \tag{3.12}$$

Példa 23 *Helyettesítéssel*

$$I = \iiint_D \left(xy^2 + 3xyz \right) \; dV \qquad D: \; 1 \leq x \leq 2 \; , \; 0 \leq xy \leq 2 \; , \; 0 \leq z \leq 1 \tag{3.13}$$

Legyen

$$u = x \; , \; v = xy \; , w = 3z \quad \Rightarrow \quad x = u \; , \; y = \frac{v}{u} \; , \; z = \frac{w}{3} \quad \Rightarrow \quad J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ? & 1/u & 0 \\ ? & 0 & 1/3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3u} \tag{3.14}$$

A határok

$$\begin{array}{rcl} 1 \leq x \leq 2 & \Rightarrow & 1 \leq u \leq 2 \\ 0 \leq xy \leq 2 & \Rightarrow & 0 \leq v \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 1 & \Rightarrow & 0 \leq w \leq 3 \end{array} \tag{3.15}$$

amiből az integrál

$$I = \int_0^2 du \int_0^2 dv \int_0^3 dw \; \frac{uv + wv}{3u} = \frac{1}{3} \left(\int_0^2 v \; dv \right) \int_0^2 du \int_0^3 dw \; \left(1 + \frac{w}{u} \right) = \int_0^2 du \; \left(2 + \frac{3}{u} \right) = 2 + ln(8) \tag{3.16}$$

3.1. :::::: Idáig hiányos :::::

4. INTEGRÁLÁS VEKTORMEZŐKÖN

4.1. A első típusú vonalintengrál

Tekintsük az $f(x,y,z) : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ háromváltozós függvény értékeit az értelmezési tartományában futó

$$C \ : \ \mathbf{r}(t) = x(t) \cdot \mathbf{i} + y(t) \cdot \mathbf{j} + z(t) \cdot \mathbf{k} \quad , \quad a \le t \le b \tag{4.1}$$

görbe mentén. Daraboljuk fel a görbét n darab elemi ívdarabkára. Legyen a k-adik ívdarab hossza Δs_k és (x_k, y_k, z_k) egy tetszőlegesen választott pont a görbe ezen szakaszán. Készítsük el az

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\ \Delta s_k \tag{4.2}$$

részletösszeget.

Tétel 24 *Ha f folytonos és a görbe $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$ és $\dot{z}(t)$ első deriváltjai folytonosak, akkor S_n konvergens, miközben $n \to \infty$ és $\Delta s_k \to 0$. A beosztás iménti finomítását röviden $\Delta s \to 0$ alakban jelölve a*

$$\lim_{\Delta s \to 0} S_n = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\ \Delta s_k \quad \doteq \quad \int_C f\ ds \tag{4.3}$$

határértéket az f függvénynek az $\mathbf{r}(t)$ görbe mentén vett 1. típusú vonalintegráljának nevezzük.

A vonalintegrál kiszámítása visszavezethető közönséges integrálásra. Felírhatjuk ugyanis, hogy

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dy)^2 = \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] \cdot (dt)^2 \tag{4.4}$$

azaz

$$ds = |\mathbf{v}(t)|\, dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt \tag{4.5}$$

ahol

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{x}(t) \cdot \mathbf{i} + \dot{y}(t) \cdot \mathbf{j} + \dot{z}(t) \cdot \mathbf{k} \tag{4.6}$$

a paraméterezett görbe sebességvektora. Ha $\mathbf{v}(t)$ folytonos és sehol sem nulla, akkor

$$\int_C f\ ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot |\mathbf{v}(t)|\ dt \tag{4.7}$$

Ez utóbbi közönséges határozott integrál független a paraméterezéstől.

Példa 25 *Legyen $f = x - 3y^2 + z$ és integráljuk a $(0,0,0)$ és az $(1,1,1)$ pontokat összekötő egyenes szakasz mentén.*

A görbe egy lehetséges paraméterezése

$$C \ : \ \mathbf{r}(t) = t \cdot \mathbf{i} + t \cdot \mathbf{j} + t \cdot \mathbf{k} \quad , \quad 0 \le t \le 1 \tag{4.8}$$

ahonnan

$$\mathbf{v}(t) = 1 \cdot \mathbf{i} + 1 \cdot \mathbf{j} + 1 \cdot \mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \tag{4.9}$$

és

$$f(x(t), y(t), z(t)) = x(t) - 3(y(t))^2 + z(t) = t - 3t^2 + t \tag{4.10}$$

$$\int_C f\ ds = \int_0^1 \left(2t - 3t^2\right) \cdot \sqrt{3}\ dt = 0 \tag{4.11}$$

A vonalintegrálok hasznos tulajdonsága, hogy a véges sok $C_1, C_2, ..., C_m$ egymáshoz kapcsolódó sima görbéből összerakott C összetett görbére igaz, hogy

$$\int_C f\ ds = \int_{C_1} f\ ds + \int_{C_2} f\ ds + ... + \int_{C_m} f\ ds \tag{4.12}$$

Példa 26 *Legyen a függvény az előbbi, de most a* $(0,0,0) \to (1,1,0) \to (1,1,1)$ *két egyenes szakaszból álló görbe mentén számoljuk ki az integrált.*

Egyszerű paraméterezés:

$$C_1\ :\ \mathbf{r}(t) = t \cdot \mathbf{i} + t \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k} \quad , \quad 0 \le t \le 1 \tag{4.13}$$

$$C_2\ :\ \mathbf{r}(t) = 1 \cdot \mathbf{i} + 1 \cdot \mathbf{j} + t \cdot \mathbf{k} \quad , \quad 0 \le t \le 1 \tag{4.14}$$

ahonnan

$$\mathbf{v}_1(t) = 1 \cdot \mathbf{i} + 1 \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \tag{4.15}$$

$$\mathbf{v}_2(t) = 0 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} + 1 \cdot \mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1 \tag{4.16}$$

és

$$\int_C f\ ds = \int_{C_1} f\ ds + \int_{C_2} f\ ds = \int_0^1 \left(t - 3t^2 + 0\right) \cdot \sqrt{2}\ dt + \int_0^1 \left(1 - 3 \cdot 1^2 + t\right) \cdot 1\ dt = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2} \tag{4.17}$$

Figyeljük meg, hogy a két szakaszból álló görbe kezdő- és végpontja ugyanaz, mint az előző példában volt, a görbék azonban különbözők és a vonalintegrál értéke is más lett. A konzervatív terek (vektormezők) kapcsán visszatérünk erre a kérdésre.

Ha a görbe a keresztmetszetéhez képest vékony "drótszerű" test, akkor a vonalintegrál segítségével néhány fizikai jellemzőt a vonalmenti tömegsűrűség segítségével számolhatunk. Ha a görbe valamely (x, y, z) pont körüli kis ds hosszúságú darabjának a tömege

$$dm = \sigma(x, y, z) \cdot ds \tag{4.18}$$

azaz $\sigma(x, y, z)$ a vonalmenti tömegsűrűség, akkor az alábbi fontosabb jellemzőket számolhatjuk

$$M = \int_C \sigma\ ds \tag{4.19}$$

$$M_x = \int_C x \cdot \sigma\ ds\ ,\ M_y = \int_C y \cdot \sigma\ ds\ ,\ M_z = \int_C z \cdot \sigma\ ds \tag{4.20}$$

$$I_x = \int_C \left(y^2 + z^2\right) \cdot \sigma\ ds\ ,\ I_y = \int_C \left(x^2 + z^2\right) \cdot \sigma\ ds\ ,\ I_z = \int_C \left(x^2 + y^2\right) \cdot \sigma\ ds \tag{4.21}$$

ahol M az össztömeg, az (M_x, M_y, M_z) első momentumokkal a görbe súlypontja

$$(X, Y, Z) = \left(\frac{M_x}{M}, \frac{M_y}{M}, \frac{M_z}{M}\right) \tag{4.22}$$

az I_x, I_y és I_z a koordinátatengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékok.

Példa 27 *Számítsuk ki a homogén* $\sigma(x, y, z) = \sigma_0$ *tömegeloszlású*

$$C\ :\ \mathbf{r}(t) = cos(4t) \cdot \mathbf{i} + sin(4t) \cdot \mathbf{j} + t \cdot \mathbf{k} \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi \tag{4.23}$$

spirálrugódarab össztömegét és a z-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.

A sebességvektort kiszámolva

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(4 \cdot sin(4t))^2 + (4 \cdot cos(4t))^2 + 1^2} = \sqrt{17} \tag{4.24}$$

Ezzel

$$M = \int_C \sigma\ ds = \sigma_0 \int_C ds = \sigma_0 \cdot L = \sigma_0 \int_0^{2\pi} \sqrt{17}\ dt = \sigma_0 \cdot 2\pi\sqrt{17} \tag{4.25}$$

ahol L a görbe hossza. Hasonlóan kapjuk, hogy

$$I_z = \int_C \left(x^2 + y^2\right) \cdot \sigma\ ds = \sigma_0 \int_0^{2\pi} (1) \cdot \sqrt{17}\ dt = \sigma_0 \cdot 2\pi\sqrt{17} \tag{4.26}$$

Példa 28 *Hol van a súlypontja annak a $z = 0$ síkban fekvő félkör alakú*

$$C\ :\ x^2 + y^2 = 1 \quad , \quad y \geq 0 \quad , \quad z = 0 \tag{4.27}$$

drótdarabnak, melynek tömegsűrűsége

$$\sigma = 2 - y \tag{4.28}$$

Alkalmas paraméterezéssel

$$C\ :\ \mathbf{r}\,(t) = cos(t) \cdot \mathbf{i} + sin(t) \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k} \quad , \quad 0 \leq t \leq \pi \qquad \Rightarrow \qquad |\mathbf{v}(t)| = 1 \tag{4.29}$$

A szimmetria miatt $M_x = M_z = 0$. Meghatározandó marad

$$M = \int_C \sigma\ ds = \int_C (2 - y)\ ds = \int_0^{\pi} (2 - sin(t)) \cdot 1\ dt = 2\pi - 2 \tag{4.30}$$

$$M_y = \int_C y \cdot \sigma\ ds = \int_C y \cdot (2 - y)\ ds = \int_0^{\pi} sin(t) \cdot (2 - sin(t)) \cdot 1\ dt = \frac{8 - \pi}{2} \tag{4.31}$$

tehát

$$Y = \frac{M_y}{M} = \frac{1}{2}\frac{8 - \pi}{2\pi - 2} \approx 0.57 \tag{4.32}$$

4.2. A második típusú vonalintengrál

Vektormezőnek nevezzük az

$$\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \ \rightarrow \mathbb{R}^3 \qquad , \qquad \mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z) \cdot \mathbf{i} + N(x, y, z) \cdot \mathbf{j} + P(x, y, z) \cdot \mathbf{k} \tag{4.33}$$

vektor-vektor függvényt.

Ilyen vektormző például az $f(x, y, z) : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható vektor-skalár függvényhez rendelt **gradiens mező**

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \mathbf{k} = \triangledown f = grad(f) \tag{4.34}$$

ami a fizikában nagy fontossággal bír.

Példa 29 *Speciálisan, ha $f = xyz$, akkor* $\triangledown f = yz \cdot \mathbf{i} + xz \cdot \mathbf{j} + xy \cdot \mathbf{k}$

Ha a vektormező fizikai erővel kapcsolatos, akkor a $\Delta\mathbf{r}$ (nagyon kicsiny) elmozdulás során végzett munka

$$\Delta W = \mathbf{F}\Delta\mathbf{r} = M(x, y, z)\Delta x + N(x, y, z)\Delta y + P(x, y, z)\Delta z \tag{4.35}$$

Legyen $\mathbf{T}$ az elmozdulás irányába mutató egységvektor és Δs az elmozdulás nagysága, azaz $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{T}\Delta s$ és $\Delta W = \mathbf{F}\Delta\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\Delta s$. Ha a mozgás a térben a C görbe mentén történik, miközben a görbe k-adik kis szakaszán ΔW_k munkavégzés van, akkor a teljes mozgás során végzett munka

$$W \approx \sum \Delta W_k \tag{4.36}$$

A görbén a beosztást finomítva kapjuk a **munka-integrált**

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\ ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C M\ dx + \int_C N\ dy + \int_C P\ dz \tag{4.37}$$

ahol

$$\mathbf{T}(x, y, z) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \tag{4.38}$$

a görbe érintő egységvektora. Az integrál létezik, ha az $\mathbf{F}$ erő folytonos függvénnyel írható le és C szakaszonként sima görbe. Vegyük észre, hogy az integrál előjele függ attól, hogy a görbét melyik irányban járjuk végig. A munka-integrál kiszámolásához célszerű a görbét paraméteres alakban felírni. Ha

$$C\ :\ \mathbf{r}(t) = x(t) \cdot \mathbf{i} + y(t) \cdot \mathbf{j} + z(t) \cdot \mathbf{k} \quad , \quad a \leq t \leq b \tag{4.39}$$

akkor

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\ dt = \int_a^b M \frac{dx}{dt}\ dt \ + \ \int_a^b N \frac{dy}{dt}\ dt \ + \ \int_a^b P \frac{dz}{dt}\ dt \tag{4.40}$$

Példa 30 *Határozzuk meg a munkát, ha*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(y - x^2\right) \cdot \mathbf{i} + \left(z - y^2\right) \cdot \mathbf{j} + \left(x - z^2\right) \cdot \mathbf{k} \qquad \text{és} \qquad C\ :\ \mathbf{r}(t) = t \cdot \mathbf{i} + t^2 \cdot \mathbf{j} + t^3 \cdot \mathbf{k} \quad , \quad 0 \leq t \leq 1 \tag{4.41}$$

A görbe paraméteres egyenletéből

$$\mathbf{F} = \left(t^2 - t^2\right) \cdot \mathbf{i} + \left(t^3 - t^4\right) \cdot \mathbf{j} + \left(t - t^6\right) \cdot \mathbf{k} \tag{4.42}$$

és

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 1 \cdot \mathbf{i} + 2t \cdot \mathbf{j} + 3t^2 \cdot \mathbf{k} \tag{4.43}$$

azaz

$$\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 1\left(t^2 - t^2\right) + 2t\left(t^3 - t^4\right) + 3t^2\left(t - t^6\right) = 2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8 \tag{4.44}$$

Ezekkel a munka

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}\ dt = \int_0^1 \left(2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8\right)\ dt = \frac{29}{60} \tag{4.45}$$

A munka integrálra hasonlító kifejezést kapunk, ha a vektormező nem erőtérrel, hanem valamilyen sebességtérrel kacsolatos. Ha $\mathbf{F}(x, y, z)$ azt mondja meg, hogy az (x, y, z) helyen valamely áramló közeg sebessége milyen, akkor a

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\ ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{4.46}$$

integrál a C görbe mentén való eredő **áramlást** adja meg.

Példa 31 *Tekintsük az* $\mathbf{F}(x, y, z) = x \cdot \mathbf{i} + z \cdot \mathbf{j} + y \cdot \mathbf{k}$ *sebességmezővel jellemzett áramlási teret. Mekkora az áramlás a*

$$C\ :\ \mathbf{r}(t) = cos(t) \cdot \mathbf{i} + sin(t) \cdot \mathbf{j} + t \cdot \mathbf{k} \quad , \quad 0 \leq t \leq \pi/2 \tag{4.47}$$

csavarvonal mentén?

A kiszámoláshoz

$$\mathbf{F}(x, y, z) = cos(t) \cdot \mathbf{i} + t \cdot \mathbf{j} + sin(t) \cdot \mathbf{k} \quad \text{és} \quad \mathbf{v} = -\,sin(t) \cdot \mathbf{i} + cos(t) \cdot \mathbf{j} + 1 \cdot \mathbf{k} \tag{4.48}$$

miatt

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \left(-sin(t) \cdot cos(t) + t \cdot cos(t) + sin(t)\right)\ dt = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \tag{4.49}$$

4.3. Zárt görbe: cirkuláció és fluxus

Különösen fontos jellemző a **zárt görbén** való áramlás mértéke, ez a közeg adott görbére vett **cirkulációja**:

$$R = \oint_C \mathbf{F}{\cdot}d\mathbf{r} \tag{4.50}$$

Példa 32 *Mekkora a cirkulációja az* $\mathbf{F}(x,y,z) = (x-y)\cdot\mathbf{i} + x\cdot\mathbf{j} + 0\cdot\mathbf{k}$ *mezőnek az*

$$\mathbf{r}\,(t) = cos(t)\cdot\mathbf{i} + sin(t)\cdot\mathbf{j}{+}0\cdot\mathbf{k} \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi \tag{4.51}$$

egységsugarú körön? (Válasz: $R = 2\pi$*)*

A most következő megfontolásokat kétdimenziós mezőkre és síkgörbére végezzük el. A probléma három dimenziós változatával a fejezet végén foglalkozunk.

Két dimenziós áramlási terekre gondolva felvetődik a kérdés: hogyan lehet kiszámolni egy **zárt görbe** által határolt tartományból kifolyó anyagmennyiség mértékét? Ha

$$\mathbf{F}(x,y) = M(x,y)\cdot\mathbf{i} + N(x,y)\cdot\mathbf{j} \tag{4.52}$$

mondja meg az áramlási sebesség irányát és nagyságát az (x,y) pontban, akkor

$$\Phi = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\;ds \tag{4.53}$$

a zárt C görbe határain kiáramló mennyiségre jellemző, ha $\mathbf{n}(x,y)$ a görbének a tartományból kifele mutató normális egységvektora. Szokásos elnevezéssel a Φ szám a vektormezőnek a C görbére vonatkozó **fluxus**a. Kiszámolásához írjuk fel az $\mathbf{n}(x,y)$ kifele mutató normálist. A görbe normálisa a görbe érintőjére merőleges vektor. A tartományból kifele mutató normális irányt az alábbi módon választhatjuk ki:

Válasszuk a zárt görbe bejárására az irányt, hogy a bezárt tartomány mindig a bal kezünk felé essen. Ezt a körüljárást nevezzük **pozitív bejárásnak**. Ha a bejárás irányába mutató érintő egységvektor

$$\mathbf{T} = T_x\cdot\mathbf{i} + T_y\cdot\mathbf{j} \tag{4.54}$$

akkor a rá merőleges, kifele (jobbra) mutató egységvektor

$$\mathbf{n}(x,y) = T_y\cdot\mathbf{i} - T_x\cdot\mathbf{j} \tag{4.55}$$

Figyelembe véve, hogy

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad\Rightarrow\quad T_x = \frac{dx}{ds} \;\;,\;\; T_y = \frac{dy}{ds} \tag{4.56}$$

kapjuk, hogy

$$\Phi = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\;ds \;=\; \oint_C (Mn_x + Nn_y)\;ds = \oint_C (MT_y - NT_x)\;ds = \oint_C (M\;dy - N\;dx) \tag{4.57}$$

Példa 33 *Mekkora a fluxusa az előző példában vett* $\mathbf{F}(x,y) = (x-y)\cdot\mathbf{i} + x\cdot\mathbf{j}$ *mezőnek az egységsugarú körre vonatkozólag?*

Mivel

$$\mathbf{r}\,(t) = cos(t)\cdot\mathbf{i} + sin(t)\cdot\mathbf{j} \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi \tag{4.58}$$

írhatjuk, hogy

$$x = cos(t) \quad , \quad y = sin(t) \quad\Rightarrow\quad dx = -sin(t)\;dt \quad \text{és} \quad dy = cos(t)\;dt \tag{4.59}$$

amivel

$$\Phi = \oint_C (M\;dy - N\;dx) = \int_0^{2\pi} ((cos(t) - sin(t))\,cos(t) \;+ sin(t)cos(t))\;dt = \int_0^{2\pi} cos(t)cos(t)\;dt = \pi \tag{4.60}$$

4.4. Konzervatív terek

Tekintsünk két olyan tetszőleges C és $\tilde{C}$ görbét, melyek **kezdő- és végpontja ugyanaz**. Lehetséges (de nem tipikus, lásd a korábbi (4.17) példát), hogy a vektormező olyan, hogy a két pont közötti különböző úton számolt munka-, vagy áramlási integrál értéke ugyanaz

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\tilde{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{4.61}$$

Ha a vektormezőre számolt munkaintegrál egy D tartomány bármely két pontjára független a két ponot összekötő görbe alakjától, azaz csak a görbe végpontjaitól függ, akkor a mezőt a D tartományban konzervatívnak mondjuk.

Tétel 34 *A (folytonos)* $\mathbf{F}$ *vektormező pontosan akkor konzervatív, ha* $\mathbf{F}$ *gradiens mező. Ez azt jelenti, hogy van olyan* $f(x, y, z)$ *skalár-függvény, hogy*

$$\mathbf{F} = \bigtriangledown f \qquad \text{azaz} \quad \mathbf{F} = (M, N, P) \;\; : \; M = \frac{\partial f}{\partial x},\; N = \frac{\partial f}{\partial y},\; P = \frac{\partial f}{\partial z} \tag{4.62}$$

Az ilyen f *függvény az* $\mathbf{F}$ *vektormező* ***potenciálfüggvénye****. A potenciál ismeretében a munka-integrálra igaz, hogy a görbe alakjától függetlenül*

$$W = \int_{C:1\to 2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_2) - f(\mathbf{r}_1) \tag{4.63}$$

ahol $\mathbf{r}_1$ *a görbe kezdő- és* $\mathbf{r}_2$ *a görbe végpontja.*

A tétel a közönséges integráloknál megtanult Newton-Leibniz-formulára hasonlít. Annál is inkább így van ez, hogy előbb feltéve, hogy $\mathbf{F} = \bigtriangledown f$ írhatjuk, hogy

$$\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \bigtriangledown \mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{df}{dt} \tag{4.64}$$

és

$$W = \int_{C:1\to 2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{df}{dt} \right) dt = f\left(\mathbf{r}\left(t\right)\right)\Big|_{t_1}^{t_2} = f(\mathbf{r}_2) - f(\mathbf{r}_1) \tag{4.65}$$

A másik állítás, miszerint a konzervatív mezőkre létezik potenciál úgy bizonyítható, hogy felírjuk a tetszőleges D-beli $\mathbf{r}_0$ pontból kiinduló akármilyen görbe mentén számolt

$$f(\mathbf{r}) = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad , \quad C \; : \; \mathbf{r_0} \to \mathbf{r} \tag{4.66}$$

integrált (mint a felső határ függvényét). Megmutatható, hogy ekkor valóban

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \nabla \left(\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}' \right) = \mathbf{F} \tag{4.67}$$

Legyen ugyanis C egy speciális görbe

$$C \; : \; \mathbf{r}\left(t\right) = \mathbf{r_0} + t \cdot \mathbf{i} \qquad 0 \le t \le h \qquad \text{azaz} \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r_0} + h \cdot \mathbf{i} \tag{4.68}$$

ekkor

$$\frac{\partial}{\partial x} f(\mathbf{r}) \bigg|_{\mathbf{r}_0} = \frac{d}{dh} f(\mathbf{r}) \bigg|_{h=0} = \frac{d}{dh} \int_0^h \mathbf{F} \cdot \mathbf{i} \; dt \bigg|_{h=0} = M\left(\mathbf{r_0}\right) \tag{4.69}$$

és hasonlóan a másik két koordinátában.

Példa 35 *Az* $\mathbf{F}(x, y, z) = yz \cdot \mathbf{i} + xz \cdot \mathbf{j} + xy \cdot \mathbf{k}$ *mező nyilván konzervatív, hiszen* $\mathbf{F} = \nabla\left(xyz\right)$*. Bármilyen* C *görbével is kötjük össze az* $(-1, 3, 9)$ *és a* $(1, 6, -4)$ *pontokat:*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 1 \cdot 6 \cdot (-4) - (-1) \cdot 3 \cdot 9 = 3 \tag{4.70}$$

Tétel 36 *Az* $\mathbf{F}(x,y,z)$ *vektormező pontosan akkor konzervatív egy* D *tartományban, ha a tartományban futó* ***bármely*** C *zárt görbére*

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0 \tag{4.71}$$

Az állítás bizonyításához a zárt görbét két különböző $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ pontjával vágjuk szét két görbére az irányításokat megtartva. Legyenek ezek $C_1 \ : \ \mathbf{a} \to \mathbf{b}$ és $C_2 \ : \ \mathbf{b} \to \mathbf{a}$. Az integrál additivitása miatt

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \tag{4.72}$$

Ha a mező konzervatív, akkor

$$\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \qquad \Longrightarrow \qquad \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0 \tag{4.73}$$

mert C_2 megfordított irányítással ugyanúgy az $\mathbf{a}$-ból a $\mathbf{b}$-be menő görbe, mint C_1.

Megfordítva:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0 \tag{4.74}$$

miatt az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ pontokat összekötő bármilyen görbére az integrál (abszolút) értéke ugyanaz, azaz az csak a kezdő- és a végpontoktól függ.

Mármost, ha a konzervatív mezőkben ilyen egyszerű a vonalintegrál számolása, akkor felvetődik a kérdés

- Hogyan lehet eldönteni adott vektormezőről, hogy konzervatív-e?
- Ha konzervatív a mező, akkor hogyan lehet megtalálni a potenciálját?

Az első kérdés megválaszolására az alábbi tétel jól használható

Tétel 37 *Egy* D *tartományban folytonos első deriváltakkal rendelkező* $\mathbf{F}(x,y,z) = (M,N,P)$ *vektormező pontosan akkor konzervatív , ha a tartományban* $rot\,(\mathbf{F}) = 0$*. A "rot" művelet a "rotáció" rövidítése, ezzel részletesebben később foglalkozunk, most elég, ha azt tudjuk, hogy*

$$rot\,(\mathbf{F}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial z}\ ,\ \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{4.75}$$

A tétel állításának egyik részét a következő úton láthatjuk be. Ha a mező konzervatív, akkor van potenciálja:

$$\mathbf{F} = \nabla f \quad \Longrightarrow \quad M = \frac{\partial f}{\partial x}\ ,\ N = \frac{\partial f}{\partial y}\ ,\ P = \frac{\partial f}{\partial z} \tag{4.76}$$

Ekkor például

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{és} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{4.77}$$

A vegyes másodrendű parciális deriváltak szimmetrikusak, azaz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \tag{4.78}$$

és hasonlóan a másik két egyenlőségre. A fordított állítás, hogy a három egyenlőség (4.75) jobb oldalán elégséges feltétele annak, hogy $\mathbf{F}(x,y,z)$ konzervatív mező legyen. Ezt most nem bizonyítjuk, a később megismerendő (Stokes-) tételnek ez közvetlen következménye.

Példa 38 *Láttuk, hogy* $\mathbf{F}(x,y,z) = yz\cdot\mathbf{i} + xz\cdot\mathbf{j} + xy\cdot\mathbf{k}$ *konzervatív. Ezt most azzal is igazolhatjuk, hogy közvetlen differenciálással kiszámoljuk a rotáció eltűnését jelentő (4.75) parciális deriváltak egyenlőségét (H.f.). Ha nem tudnánk, hogy* $f = xyz$ *potenciálfüggvénye ennek a mezőnek, akkor hogyan keresnénk meg a potenciált?*

Keressük tehát az az $f(x,y,z)$ függvényt, amire teljesül, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz \ , \ \frac{\partial f}{\partial y} = xz \ , \frac{\partial f}{\partial z} = xy \tag{4.79}$$

Ez egy speciális parciális differenciálegyenlet f-re, amit közvetlen integrálással megoldhatunk. Az első egyenletet x szerint integráljuk, miközben y-t és z-t állandónak fogjuk fel. Így kapjuk, hogy

$$f(x,y,z) = xyz + c(y,z) \tag{4.80}$$

ahol a c integrációs állandót y és z függvényeként írtuk fel, arra gondolva, hogy ennek értéke változhat, miközben y és z változik. Az így kapott függvény akkor elégíti ki a második egyenletet, ha

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xyz + c(y,z)) = xz + \frac{\partial c}{\partial y} = xz \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial c}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad c\,(y,z) = c\,(z) \tag{4.81}$$

majd a harmadik egyenlet miatt

$$c\,(z) = c \tag{4.82}$$

azaz a keresett potenciálfüggvény

$$f(x,y,z) = xyz + c \tag{4.83}$$

ahol c tetszőleges állandó.

Példa 39 *Legyen* $\mathbf{F}(x,y,z) = [e^x cos(y) + yz] \cdot \mathbf{i} + [xz - e^x sin(y)] \cdot \mathbf{j} + [xy + z] \cdot \mathbf{k}$ *egy ellenőrizhetően (H.f.) konzervatív mező. Mi a potenciálja?*

Az első komponensre

$$\frac{\partial f}{\partial x} = [e^x cos(y) + yz] \quad \Rightarrow \quad f(x,y,z) = e^x cos(y) + xyz + c(y,z) \tag{4.84}$$

amiből

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^x sin(y) + xz + \frac{\partial}{\partial y}c(y,z) = [xz - e^x sin(y)] \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}c(y,z) = 0 \quad \Rightarrow \quad c(y,z) = c\,(z) \tag{4.85}$$

majd a harmadik egyenlettel

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xy + \frac{\partial}{\partial z}c(z) = [xy + z] \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z}c(z) = z \quad \Rightarrow \quad c(z) = \frac{z^2}{2} + c \tag{4.86}$$

azaz

$$f(x,y,z) = e^x cos(y) + xyz + \frac{z^2}{2} + c \tag{4.87}$$

Példa 40 *Az* $\mathbf{F}(x,y,z) = y \cdot \mathbf{i} - x \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}$ *mező nem konzervatív, hiszen például*

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -1 \quad \neq \quad \frac{\partial M}{\partial y} = +1 \tag{4.88}$$

Így aztán az előzőekben vázolt integrálási séma nem vezethet eredményre. És valóban

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \quad \Rightarrow \quad f = xy + c(y,z) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial}{\partial y}c(y,z) \tag{4.89}$$

a második egyenlettel összevetve

$$\frac{\partial}{\partial y}c(y,z) = 2x \tag{4.90}$$

lenne, ami képtelenség, hiszen a bal oldal (y,z)*, míg a jobb oldal* x *függvénye, ami minden* (x,y,z)*-re nem teljesülhet.*

Példa 41 *Nem konzervatív az* $\mathbf{F}(x,y,z) = [2x - 3] \cdot \mathbf{i} - z \cdot \mathbf{j} + cos(z) \cdot \mathbf{k}$ *mező.*

4.5. Differenciálformák

Az munkaintegrálokat felírhatjuk az

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C M\ dx + \int_C N\ dy + \int_C P\ dz = \int_C M\ dx + N\ dy + \ P\ dz \tag{4.91}$$

alakban, ahol az utolsó jelölés sugallja, a

$$\delta f = M\ dx + N\ dy + \ P\ dz \tag{4.92}$$

(3 változós) **differenciálforma** bevezetését. Korábban (M, N, P) egy vektormező komponensei voltak, most gondolhatunk tetszőleges M, N, P függvényekre a kifejezésben. Láttuk, hogy az ilyen differenciálformák görbék mentén való integrálása különösen egyszerű, ha történetesen van olyan $f(x, y, z)$ függvény, amire

$$M = \frac{\partial f}{\partial x}\ ,\ N = \frac{\partial f}{\partial y}\ ,\ P = \frac{\partial f}{\partial z} \tag{4.93}$$

Hiszen ekkor

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\ dx + \frac{\partial f}{\partial y}\ dy + \ \frac{\partial f}{\partial z}\ dz\ =\ df \quad \Rightarrow \quad \int_C \delta Q = \int_C df = f(\mathbf{r}_2) - f(\mathbf{r}_1) \tag{4.94}$$

ahol $\mathbf{r}_1$ a görbe kezdő- és $\mathbf{r}_2$ a görbe végpontja.

Definíció 42 *A $\delta f = M\ dx + N\ dy + \ P\ dz$ differenciálforma egzakt D-ben, ha van olyan f függvény, hogy D minden pontjában $\delta f = df$*

Tétel 43 *A $\delta f = M\ dx + N\ dy + \ P\ dz$ differenciálforma pontosan akkor egzakt D-ben, ha D minden pontjában*

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial z}\ ,\ \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{4.95}$$

Vektormezőknél ez pontosan akkor teljesül, ha a mező konzervatív.

Példa 44 *A $\delta f = y\ dx + x\ dy + \ 4\ dz$ differenciálforma egzakt, hiszen*

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \qquad = \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1 \tag{4.96}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial 4}{\partial x} = 0 \qquad = \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial z} = 0 \tag{4.97}$$

$$\frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} = 0 \qquad = \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial 4}{\partial y} = 0 \tag{4.98}$$

és

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = y \quad \Rightarrow \quad f = xy + c(y, z) \tag{4.99}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial c(y, z)}{\partial y} = N = x \quad \Rightarrow \ c(y, z) = c(z) \tag{4.100}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial c(z)}{\partial z} = P = 4 \quad \Rightarrow \ c(z) = 4z + c \tag{4.101}$$

Tehát

$$f\,(x, y, z) = xy + 4z + c \tag{4.102}$$

és például az $(1, 1, 1) \to (2, 3, -1)$ pontokat összekötő bármilyen görbe mentén

$$\int_C \delta f = \int_C df = f(2, 3, -1) - f(1, 1, 1) = -3 \tag{4.103}$$

Példa 45 *A termodinamika első főtétele azt mondja ki, hogy termodinamikai folyamatok során nem lehet energiát nyerni. Matematikailag ezt úgy fejezhetjük ki, hogy a (belső) energia állapotfüggvény, azaz bármilyen folyamat segítségével is jutunk el az* (1) *állapotból a* (2) *állapotba*

$$U(2) - U(1) = \Delta L + \Delta Q \tag{4.104}$$

A konkrét folyamattól függ, hogy közben mennyi a ΔL mechanikai munkavégés és a ΔQ hőcsere, de összegük csak a folyamat végpontjaitól. Lefordítva a differenciálformák nyelvére, azaz a folyamatok infinitezimálisan kicsiny szakaszait vizsgálva

$$dU = \delta L + \delta Q \tag{4.105}$$

amivel azt fejezzük ki, hogy δL és δQ nem egzakt differenciálforma, de összegük már igen, és emiatt

$$\int_{C:1\to 2} dU = U(2) - U(1) \tag{4.106}$$

A kétváltozós differenciálformák izgalmas tulajdonsága, hogy azok **egzakttá tehetők**.

Tétel 46 *A $\delta f = M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy$ differenciálformához található olyan $\mu(x,y)$ függvény, hogy*

$$\mu(x,y)\,\delta f = dg \tag{4.107}$$

egzakt forma legyen. A $\mu(x,y)$ függvény(ek) neve: ***integráló tényező***.

Nyilvánvalóan az egzaktság feltétele, hogy

$$\mu(x,y)\,M(x,y) = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \qquad \text{és} \quad \mu(x,y)\,N(x,y) = \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \tag{4.108}$$

legyen. Az integráló tényező (és így $g(x,y)$) felkutatása ezek alapján a következőképpen végezhető el. Tekintsük a

$$g(x,y) = c \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy = 0 \tag{4.109}$$

egyenletet, amit felfoghatunk úgy, mint az

$$y = y(x) \tag{4.110}$$

függvény implicit megadását. Akkor azonban

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) / \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = -\frac{M}{N} \tag{4.111}$$

Ha megoldjuk az utóbbi közönséges differenciálegyenletet $y = y(x)$-re, akkor megkapjuk a μ és g függvényeket.

Példa 47 *Legyen $\delta f = -y\ dx + x\ dy$, amiről látható, hogy nem egzakt. Keressünk integráló tényezőt!*

Esetünkben

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \tag{4.112}$$

A változók szétválasztásával és integrálva

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad ln(y) = ln(x) + c \tag{4.113}$$

Lehetséges választás

$$g(x,y) = ln(y) - ln(x) = c \tag{4.114}$$

és ekkor

$$\mu(x,y)\,M(x,y) = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad -\mu y = -\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \mu(x,y) = \frac{1}{xy} \tag{4.115}$$

és ellenőrzésül

$$\mu\,(x,y)\,N\,(x,y) = \frac{\partial g\,(x,y)}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \mu x = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad \mu\,(x,y) = \frac{1}{xy} \tag{4.116}$$

Másik integráló tényezőt kapunk, ha az

$$ln(y) = ln(x) + c \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = C \quad \Rightarrow \quad g\,(x,y) = \frac{y}{x} \tag{4.117}$$

utat követjük. Ekkor

$$-\mu y = -\frac{y}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \mu\,(x,y) = \frac{1}{x^2} \tag{4.118}$$

Gyakorló feladat 48 *Keressünk integráló tényezőt a következő differenciálformákhoz*

$$\delta f = sin(y)\;dx + sin(x)\;dy \quad , \quad \delta f = \left(x^2 - y^2\right)\;dx - (x-y)\;dy \quad , \quad \delta f = \sqrt{1-y^2}\;dx - \frac{1}{x}\;dy \tag{4.119}$$

Példa 49 *A termodinamika második főtétele. Az első főtételt átírva*

$$dU = \delta L + \delta Q \quad \Rightarrow \quad \delta Q = dU - \delta L \tag{4.120}$$

és figyelembe véve, hogy gázoknál $\delta L = -p\;dV$

$$\delta Q = dU + p\;dV = \left[\frac{\partial U}{\partial p}dp + \frac{\partial U}{\partial V}dV\right] + p\;dV = \left[\frac{\partial U}{\partial p}\right]\;dp + \left[\frac{\partial U}{\partial V} + p\right]\;dV \tag{4.121}$$

Nyilvánvaló, hogy δQ *nem egzakt, hiszen akkor*

$$\frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{\partial U}{\partial p}\right] = \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{\partial U}{\partial V} + p\right] \tag{4.122}$$

szükséges, azaz

$$\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial p} = \frac{\partial^2 U}{\partial p \partial V} + 1 \tag{4.123}$$

lenne, ami ellentmond az $U(p,V)$ *függvény másodrendű parciális deriváltjai szimmetriájának. A kétváltozós differenciálforma egzakttá tehető, azaz van olyan* $\mu\,(p,V)$ *függvény, hogy*

$$\mu\,(p,V)\;\;\delta Q = dS\,(p,V) \tag{4.124}$$

legyen. A második főtétel szerint a $\mu\,(p,V)$ *integráló tényező csak a testek empírikus (˜mért) hőmérsékletétől függ, azaz független az azonos hőmérsékletűnek mért testek nyomásától és térfogatától. Szokásos választással*

$$\mu\,(p,V) = \frac{1}{T} \tag{4.125}$$

ahol T *a hőmérséklet. Ezzek után a főtétel lényegi állítása: Létezik olyan* $S\,(p,V)$ *entrópiának nevezett* ***állapotfüggvény****, hogy a termodinamikai folyamatokra*

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \tag{4.126}$$

4.6. Green-formula

Megmutatjuk, hogy a folytonos parciális deriváltakkal rendelkező $A(x,y)$ függvényre

$$\iint_S \frac{\partial A(x,y)}{\partial x}\;df = \oint_C A(x,y)\;dy \;\text{ és }\; \iint_S \frac{\partial A(x,y)}{\partial y}\;df = -\oint_C A(x,y)\;dx \tag{4.127}$$

ahol C egy egyszerű zárt síkgörbe és S az általa bekerített tertomány. Tekintsünk azt a zárt görbét, melyet alulról az $y = c_1(x)$ és felülről az $y = c_2(x)$ görbék határolnak, miközben $a \le x \le b$. A felületi integrálra ekkor

$$\iint_S \frac{\partial A(x,y)}{\partial y}\ df = \int_a^b \left[\int_{y=c_1(x)}^{y=c_2(x)} \frac{\partial A(x,y)}{\partial y}\ dy \right]\ dx = \int_a^b \left[A(x,y) \right]_{y=c_1(x)}^{y=c_2(x)}\ dx \tag{4.128}$$

$$= \int_a^b A(x, c_2(x))\ dx - \int_a^b A(x, c_1(x))\ dx = -\int_b^a A(x, c_2(x))\ dx - \int_a^b A(x, c_1(x))\ dx \tag{4.129}$$

Másrészt a másodfajú vonalintegrálunk

$$\oint_C A(x,y)\ dx = \int_a^b A(x, c_1(x))\ dx - \int_a^b A(x, c_2(x))\ dx \tag{4.130}$$

ahol figyelembe vettük, hogy a felületi integrál számolásánál a görbék irányítása olyan, hogy $c_1 : a \to b$ és $c_2 : a \to b$, miközben a C zárt görbéhez c_2 irányítását meg kell fordítanunk. Összevetve kapjuk, hogy valóban

$$\iint_S \frac{\partial A(x,y)}{\partial y}\ df = -\oint_C A(x,y)\ dx \tag{4.131}$$

Hasonlóan ellenőrizhetjük a másik összefüggést. A két egyenlőség kombinálásával kapjuk, hogy $A(x,y)$ és $B(x,y)$ függvényekre

$$\iint_S \left[B_x - A_y \right]\ df = \oint_C A\ dx + B\ dy \tag{4.132}$$

Ha ezt az eredményt egy

$$\mathbf{F}(x,y) = (M(x,y), N(x,y)) = M(x,y) \cdot \mathbf{i} + N(x,y) \cdot \mathbf{j} \tag{4.133}$$

komponenseire alkalmazzuk, akkor a következő fontos **Green-formulák**at kapjuk

- $A = M,\ B = N\ \Rightarrow$ Stokes-tétel a síkban

$$\iint_S \left[N_x - M_y \right]\ df = \oint_C M\ dx + N\ dy = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\ ds = R \qquad \text{cirkukáció} \tag{4.134}$$

- $A = -N,\ B = M\ \Rightarrow$ Gauss-tétel a síkban

$$\iint_S \left[M_x + N_y \right]\ df = \oint_C -N\ dx + M\ dy = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ ds = \Phi \qquad \text{fluxus} \tag{4.135}$$

A Green-formulák jól használhatók arra, hogy a cirkulációt és a fluxust másodfajú vonalintegrálok helyett kettős integrálokkal számoljuk ki. A zárt síkgörbe helyett az általa bezárt síktartományra kell tehát integrálnunk

Példa 50 *Számoljuk ki az*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x - y) \cdot \mathbf{i} + x \cdot \mathbf{j} \tag{4.136}$$

vektormező cirkulációját és a fluxusát az r sugarú körre vonatkozólag!

Most

$$M_x = 1\ \ ,\ \ N_x = 1\ \ ,\ \ M_y = -1\ \ ,\ \ N_y = 0 \tag{4.137}$$

így

$$R = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\ ds = \iint_S \left[N_x - M_y \right]\ df = \iint_S 2\ df = 2 \iint_S\ df = 2 \cdot r^2 \pi \tag{4.138}$$

és

$$\Phi = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ ds = \iint_S \left[M_x + N_y \right]\ df = \iint_S 1\ df = r^2 \pi \tag{4.139}$$

Példa 51 *Az első síknegyedben levő* $(0,0)\,,(1,0)\,,(1,1)\,,(0,1)$ *csúcsokkal adott négyzet alakú zárt görbe mentén számoljuk ki az*

$$\oint_C -y^2\ dx + xy\ dy \tag{4.140}$$

integrált!

Vehetjük úgy, hogy

$$M = xy \quad \text{és} \quad N = y^2 \tag{4.141}$$

mely esetben

$$\oint_C -N\ dx + M\ dy = \iint_S [M_x + N_y]\ df = \iint_S [y + 2y]\ df = \int_0^1 \left(\int_0^1 [3y]\ dx \right) dy = \int_0^1 [3y]\ dy = \frac{3}{2} \tag{4.142}$$

Ugyanezt kapjuk, ha a

$$N = xy \quad \text{és} \;\; M = -y^2 \tag{4.143}$$

választással

$$\oint_C M\ dx + N\ dy = \iint_S [N_x - M_y]\ df = \iint_S [y + 2y]\ df = \iint_S [3y]\ df = \frac{3}{2} \tag{4.144}$$

módon számolunk.

Gyakorló feladat 52 *Legyen* $\mathbf{F}(x,y,z) = x \cdot \mathbf{i} + y^2 \cdot \mathbf{j}$ *és tekintsük a* $(-1,-1)\,,(1,-1)\,,(1,1)\,,(-1,1)$ *origó körüli négyzetet. Mutassuk meg, hogy*

$$\Phi = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ ds = 4 \tag{4.145}$$

A Green-formulákat ugyan csak egyszerű görbével határolt síktartományra vezettük le, igazak maradnak azonban bonyolultabb esetre is. Arra kell vigyáznunk, hogy a felületi integrálok tartományán a megfelelő parciális deriváltak és a felületi integrál létezzen, a görbe menti integrálokat pedig az összetett határgörbéken kell kiszámolnunk. A felületdarab határoló görbéit úgy kell irányítani, hogy a tartomány belseje mindig a bal kezünk felé essen.

Példa 53 *Számoljuk ki az*

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{-y \cdot \mathbf{i} + x \cdot \mathbf{j}}{x^2 + y^2} \tag{4.146}$$

mezőnek a cirkulációját az origót körülvevő tetszőleges C zárt görbére!

A mező szinguláris a $(0,0)$ origóban. Vegyük körül az origót egy ε sugarú körrel, úgy, hogy a körlap teljesen a C belsejében legyen. Ekkor

$$\iint_S [N_x - M_y]\ df = \oint_{C_\varepsilon} (M\ dx + N\ dy) + \oint_C (M\ dx + N\ dy) \tag{4.147}$$

ahol S a körvonal és a C zárt görbe közötti tartomány. Helyesen a belső C_ε körvonalat az óramutató járásával megegyezően (negatív körüljárás) kell irányítanunk, hiszen akkor esik S balkéz felől:

$$C_\varepsilon \ :\ \varepsilon \cdot cos(t) \cdot \mathbf{i} - \varepsilon \cdot sin(t) \cdot \mathbf{j} \quad 0 \le t \le 2\pi \tag{4.148}$$

Ekkor

$$dx = -\varepsilon \cdot sin(t)\ dt \quad , \quad dy = -\varepsilon \cdot cos(t)\ dt \tag{4.149}$$

$$-y\ dx + x\ dy = -\varepsilon \cdot sin(t) \cdot \varepsilon \cdot sin(t) - \varepsilon \cdot cos(t) \cdot \varepsilon \cdot cos(t) = -\varepsilon^2 \tag{4.150}$$

és

$$\oint_{C_\varepsilon} (M\ dx + N\ dy) = \oint_{C_\varepsilon} \frac{-y\ dx + x\ dy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2 \cdot (cos(t))^2 + \varepsilon^2 \cdot (sin(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} (-1)\, dt = -2\pi \tag{4.151}$$

Mivel az S tartományon

$$[N_x - M_y] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{\left[1\left(x^2+y^2\right) - 2x^2\right] - \left[-1\left(x^2+y^2\right) + 2y^2\right]}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 0 \tag{4.152}$$

így az

$$R_C = \oint_C (M\ dx + N\ dy) = \iint_S [N_x - M_y]\ df - \oint_{C_\varepsilon} (M\ dx + N\ dy) = 0 - (-2\pi) = 2\pi \tag{4.153}$$

cirkuláció C görbe alakjától függetlenül $R = 2\pi$.

4.7. Divergencia, rotáció 2 dimenzióban

Ha a tartományt a $P = (x_0, y_0)$ pont körül elegendően kicsinyre választjuk, akkor a folytonos $U(x,y)$ függvényre

$$\iint_S U(x,y)\ df \approx U(x_0,y_0) \iint_S df = U(x_0,y_0)\ A_S \tag{4.154}$$

ahol A_S az S felület területe. Ennek segítségével definiálhatjuk a vektormező lokális jellemzőit a síkban

$$div_{xy}(\mathbf{F}) = M_x + N_y \ = \ \lim_{S\to 0} \frac{1}{A_S} \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ ds \quad \text{divergencia} \ \approx \ \text{fluxus-sűrűség} \ \approx \ \text{forrásosság} \tag{4.155}$$

$$rot_z(\mathbf{F}) = N_x - M_y \ = \ \lim_{S\to 0} \frac{1}{A_S} \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\ ds \quad \text{rotáció} \ \approx \ \text{cirkuláció-sűrűség} \ \approx \ \text{örvényesség} \tag{4.156}$$

Példa 54 *Mi a síkbeli divergencia és a rotáció ha*

$$\mathbf{F}(x,y) = (x^2 - y)\cdot\mathbf{i} + (xy - y^2)\cdot\mathbf{j} \tag{4.157}$$

Most

$$M = (x^2 - y) \quad \Rightarrow \quad M_x = 2x \quad , \quad M_y = -1 \tag{4.158}$$

$$N = (xy - y^2) \quad \Rightarrow \quad N_x = y \quad , \quad N_y = x - 2y \tag{4.159}$$

ahonnan

$$div_{xy}(\mathbf{F}) = M_x + N_y \ = 3x - 2y \quad \text{és} \quad rot_z(\mathbf{F}) = N_x - M_y = y + 1 \tag{4.160}$$

4.8. Felületi integrálok

Eleddig a vektormezőnek viselkedését a síkban jellemeztük. Hasonlóan vezetjük be a 3 dimenziós tér tetszőleges pontjában a lokális jellemzőket. Ehhez szükségünk lesz a felületi integrál fogalmához, amit az alábbiakban vezetünk be.

Legyen $f(x,y,z)$ egy háromváltozós folytonos függvény és S egy felületdarab a térben. Osszuk fel az S felületet tetszés szerint $k = 1, 2, .., n$ elemi kis felületdarabkára. Az egyes darabkák területe legyen ΔS_k. Minden darabban (esetleg a határán) vegyünk fel egy ízlés szerinti (x_k, y_k, z_k) pontot a felületen és készítsük el a

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\ \Delta S_k \tag{4.161}$$

(részlet)összeget. A felület beosztását minden határon túl finomíthatjuk, azaz vizsgálhatjuk az $n \to \infty$ és $\Delta S_k \to 0$ határesetet. Vigyázzunk, hogy a felületdarabok minden irányú kiterjedése is eltűnjön (röviden $\Delta S \to 0$ jelöléssel élünk erre a határátmenetre). Ha a

$$\lim_{\Delta S \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\ \Delta S_k \doteq \iint_S f\ dS \tag{4.162}$$

határérték létezik, azaz beosztás finomításának módjától és a köztes pont választásától függetlenül ugyanazt a számot adja, akkor azt az f függvénynek az S felületre vett 1. típusú felületi integráljának nevezzük.

A felületi integrálokkal, azok kiszámolásával most bővebben nem foglalkozunk, egy kivételtől eltekintve. Tekintsük ugyanis az

$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z) \cdot \mathbf{i} + N(x,y,z) \cdot \mathbf{j} + P(x,y,z) \cdot \mathbf{k} \tag{4.163}$$

vektormezőt és legyen S egy felület a három dimenziós térben. Ha áramlási mezőre gondolunk, akkor a felület valamely (x, y, z) pontja körüli kis ΔS nagyságú felületdarabkáján átáramló közeg mennyisége

$$\Delta\Phi \sim \mathbf{F}(x,y,z) \cdot \mathbf{n}\ \Delta S \tag{4.164}$$

ahol $\mathbf{n}$ az adott felületdarabka normális egységvektora. Ha ezt a teljes felületre "felösszegezzük", akkor kapjuk az $\mathbf{F}(x, y, z)$ vektormező **fluxusát** az S felületre, azaz

$$\Phi = \iint_S \mathbf{F}(x,y,z) \cdot \mathbf{n}\ dS = \iint_S \mathbf{F}(x,y,z) \cdot d\mathbf{S} \tag{4.165}$$

ahol bevezettük a

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}\ dS \tag{4.166}$$

irányított felületelemet. Egy felületre, annak minden pontjában normális egységvektor kétféleképpen is megválasztható, mutahat a felület bármelyik oldala felé. Zárt felületnél a normális irányát úgy választjuk meg, hogy az a bezárt tartományból kifelé mutasson.

4.9. Divergencia és rotáció 3 dimenzióban

A felületi és a térfogati integrál használatával a síkbeli tételhez hasonlóan megmutatható a **Gauss-tétel**, vagy divergencia-tétel. Legyen S egy zárt felület és V a felület által határolt tartomány. Ekkor (föltéve, hogy a szereplő mennyiségek egyáltalán értelmesek)

$$\iiint_V div(\mathbf{F})\ dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ dS = \Phi \tag{4.167}$$

ahol az $\mathbf{F}$ vektormező divergenciája egy skalár mennyiség

$$div(\mathbf{F}) = M_x + N_y + P_z = \bigtriangledown \mathbf{F} \tag{4.168}$$

A Gauss-tétel alapján a divergencia szemléletes jelentése

$$div(\mathbf{F}) = \lim_{S \to 0} \frac{1}{V_S} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ dS \tag{4.169}$$

azaz továbbra is a mező lokális forrássosságát (fluxus-sűrűségét) jellemzi. Az S zárt felületből kiáramló mennyiség, a fluxus osztva a felület által határolt tartomány térfogatával valóban a vektormező fluxus-, vagy forrás-sűrűségét jellemzi.

Példa 55 *Mi a divergenciája az* $\mathbf{F} = 2xz \cdot \mathbf{i} - xy \cdot \mathbf{j} - z \cdot \mathbf{k}$ *vektormezőnek.*
$[Válasz:\ div\,(\mathbf{F}) = 2z - x - 1]$

Példa 56 $div\,(\mathbf{r}) = 3,\ div\,(\mathbf{r}/r) = 2/r$

Példa 57 *Számítsuk ki az $\mathbf{F} = \mathbf{r}$ vektormező esetén a Gauss-tétel mindkét integrálját az a sugarú gömbre!*

Mivel $div\,(\mathbf{r}) = 3$

$$\iiint_V div(\mathbf{F})\ dV = 3\iiint_V div(\mathbf{F})\ dV = 3 \cdot V = 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot a^3\pi = 4a^3\pi \tag{4.170}$$

továbbá

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r} = \frac{r^2}{r} = r \tag{4.171}$$

miatt

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ dS = \iint_S r\ dS\ = a\ \iint_S r\ dS = a \cdot S = a \cdot 4\pi a^2 = 4\pi a^3 \tag{4.172}$$

A Gauss-tételhez hasonlóan általánosítható a másik Green-formula 3 dimenzióra. A vonatkozó **Stokes-tétel** szerint ha S egy olyan felületdarab és annak a C zárt görbe a határoló görbéje, akkor

$$\iint_S rot(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\ dS = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\ ds = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = R \tag{4.173}$$

A tételben a felület és a görbe irányítása összefügg, a görbét úgy kell irányítanunk, hogy a felület választott normálisával jobb-csavart alkosson. Ez például a következőt jelenti: Tartsuk képzeletben a jobb kezünket a felület határához úgy, hogy tenyerünk a tartomány belseje felé, a hüvelykujjunk pedig a felület külsőnek választott oldala irányába (a választott normális irányába) nézzen. Ekkor a begörbült további ujjaink a határgörbén a megkívánt körüljárás irányába mutatnak. Másképp megfogalmazva: A választott normális vektor csúcsának az irányából nézve a határgörbe legyen pozitív irányítású, vagyis az óramutató járásával ellentétes körüljárású.

A felületi integrálban a vektormező **rotációja** jelenik meg. Ez egy vektoriális jellemzője a mezőnek:

$$rot(\mathbf{F}) = (P_y - N_z) \cdot \mathbf{i} - (P_x - M_z) \cdot \mathbf{j} + (N_x - M_y) \cdot \mathbf{k} = \bigtriangledown \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ M & N & P \end{vmatrix} \tag{4.174}$$

Példa 58 $rot\,(\mathbf{r}) = 0,\ \ rot\,(\mathbf{r}/r) = 0$

Példa 59 *Legyen $\mathbf{F} = \left(x^2 - y\right) \cdot \mathbf{i} + 4z \cdot \mathbf{j} + x^2 \cdot \mathbf{k}$, számoljuk ki a rotációját!*
[Válasz: $rot(\mathbf{F}) = -4 \cdot \mathbf{i} - 2x \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k}$]

Példa 60 *Számoljuk ki a Stokes-tételben szereplő két integrált, ha a felület az $S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ z \geq 0$ félgömb és a mező: $\mathbf{F} = y \cdot \mathbf{i} - x \cdot \mathbf{j}$*

Legyen a választott normális a növekvő z irány. A határgörbe helyes körüljárással

$$C\ :\ \mathbf{r}\,(t) = 3 \cdot cos(t) \cdot \mathbf{i} + 3 \cdot sin(t) \cdot \mathbf{j} \quad ,\quad 0 \leq t \leq 2\pi \tag{4.175}$$

Ekkor

$$d\mathbf{r}\,(t) = [-3 \cdot sin(t) \cdot \mathbf{i} + 3 \cdot cos(t) \cdot \mathbf{j}]\ dt \quad \text{és} \quad \mathbf{F} = 3 \cdot sin(t) \cdot \mathbf{i} - 3 \cdot cos(t) \cdot \mathbf{j} \tag{4.176}$$

miatt

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} [-3 \cdot sin(t) \cdot 3 \cdot sin(t) - 3 \cdot cos(t) \cdot 3 \cdot cos(t)]\,dt = \int_0^{2\pi} [-9]\ dt = -18\pi \tag{4.177}$$

Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\bigtriangledown \times \mathbf{F} = -\,2 \cdot \mathbf{k} \tag{4.178}$$

a felület normálisa pedig sugárirányú

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k}}{3} \tag{4.179}$$

amikből

$$rot(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = \frac{-2 \cdot z}{3} \tag{4.180}$$

A felületnek legmegfelelőbb a gömbi koordináták választása

$$dS = r^2 \cdot sin\,(\vartheta)\;\; d\vartheta\;\; d\varphi \qquad \text{és} \quad z = r \cdot cos\,(\vartheta) \tag{4.181}$$

amivel

$$\iint_S rot(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\; dS = \iint_S \frac{-2 \cdot z}{3}\; dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{-2 \cdot 3 \cdot cos\,(\vartheta)}{3}\; 3^2 \cdot sin\,(\vartheta)\;\; d\vartheta\;\; d\varphi \tag{4.182}$$

$$= -2 \cdot 3^2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} cos\,(\vartheta) \cdot sin\,(\vartheta)\;\; d\vartheta = -18 \cdot 2\pi \int_0^1 u\; du = -18\pi \tag{4.183}$$

A Stokes-tétel segítségével a rotáció szemléletes jelentése:

$$rot(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{S \to 0} \frac{1}{A_S} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{4.184}$$

Ez azt jelenti, hogy az **n** egységvektorral jellemzett tengelyre vonatkozó rotáció (örvényesség) jellemzéséhez egy adott helyen választanunk kell egy olyan felületet, melynek normálisa az **n** irány. A határgörbére kiszámolt cirkuláció osztva a felület felszínével az adott tengely körüli cirkuláció sűrűségét adja, ha a görbét (és így a felületet) a tengelyre zsugorítjuk.

A Stokes-tétel ismeretében most térhetünk vissza a korábbi (4.75) állításra. Ha a D tartományban $rot(\mathbf{F}) = 0$, akkor a bal oldali integrál nulla volta miatt

$$\oint_G \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\; ds = 0 \qquad \text{minden zárt görbére} \tag{4.185}$$

azaz a vektormező konzervatív.

Gyakorló feladat 61 *Mutassuk meg, hogy bármilyen folytonos első- és második parciális deriváltakkal rendelkező $f(x, y, z)$ függvényre*

$$rot\,(grad\,(f)) = \nabla \times \nabla f = 0 \tag{4.186}$$