Matematikai Módszerek a Fizikában II

Vizsgadolgozat

SZTE, Elméleti Fizikai Tanszék, 2002. január 14.

Disztribúciók

F. 1 *Miért disztribúció* $< cos(x)|\varphi(x) >= \int cos(x)\varphi(x)dx$ *a* $\mathcal{K}$ *és az* $\mathcal{S}$ *alaptéren és miért nem az az* $\mathcal{L}^2(\Re)$ *Hilbert téren?*

Válasz:

$cos(x)$ lokálisan integrálható, ez elegendő $\mathcal{K}$ -n
lassan növő, ez elegendő $\mathcal{S}$ -en
$\mathcal{L}^2(\Re)$ önduális, viszont $cos(x) \notin \mathcal{L}^2(\Re)$

F. 2 *Bizonyítsuk, hogy* $x^2 \cdot \delta^{(2)}(x) = 2\delta(x)$ *és/vagy az általános formulát:* $x^n \cdot \delta^{(n)}(x) = (-1)^n n! \cdot \delta(x)$

Válasz:

$< x^n \cdot \delta^{(n)}(x)|\varphi(x) >=< \delta^{(n)}(x)|x^n\varphi(x) >= (-1)^n < \delta(x)|\left(x^n\varphi(x)\right)^{(n)} >= (-1)^n n! \cdot \varphi(0)$

F. 3 *Az* $xf^{(2)}(x) + f^{(1)}(x) + xf(x) = 0$ *differenciálegyenlet minden* x*-re sima megoldása a* $J_0(x)$ *nulladrendű Bessel függvény* ($J_0(-x) = J_0(x)$)*. Mutassuk meg, hogy disztribúció értelemben* $f(x) = \Theta(x)J_0(x)$ *is megoldása a differenciálegyenletnek* ($\Theta(x)$ *a Heaviside függvény)!*

Válasz:

Felhasználva, hogy $f^{(1)} = \delta J_0 + \Theta J_0^{(1)}$; $f^{(2)} = \delta^{(1)} J_0 + 2\delta J_0^{(1)} + \Theta J_0^{(2)}$; $x\delta(x) = 0$ és $x\delta^{(1)}(x) = -\delta(x)$ kapjuk, hogy $xf^{(2)} + f^{(1)} + xf = -\delta J_0 + x\Theta J_0^{(2)} + \delta J_0 + \Theta J_0^{(1)} + x\Theta J_0 = \Theta\left(xJ_0^{(2)} + J_0^{(1)} + xJ_0\right) = 0$

F. 4 *Mi az a* $g \in \mathcal{S}^*$ *disztribúció, amivel a* $g * f = f$ *konvolúciós egyenlet minden* $f \in \mathcal{S}^*$ *-ra teljesül? Fourier transzformáltjanak a segítségével is, hogy van ilyen g disztribúció! Mutassuk ki, hogy a megoldás egyértelmű!*

Válasz:

Tudjuk, hogy $g(x) = \delta(x)$ ilyen, ez egyértelmű, mert $(g - \tilde{g}) * f = 0$ -ból $f(x) = \delta(x)$ -re $g = \tilde{g}$ következik
Másrészt $\mathcal{F}[g * f] = \mathcal{F}[g] \cdot \mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[f]$-ból $\mathcal{F}[g] = 1$ és akkor pedig $g = \delta$ megint egyértelmű

F. 5 *Mi az* $|x|$ *reguláris disztribúció Fourier transzformáltja! Útmutatás: Használjuk fel, hogy* $|x| = x \cdot sgn(x)$ *és* $\mathcal{F}[sgn(x)] = 2\mathcal{P}\left(\frac{1}{i\omega}\right)$*....*

Válasz:

Felhasználjuk, hogy $\mathcal{F}[-ixf(x)](\omega) = d/d\omega\, \mathcal{F}[f(x)](\omega)$ ahonnan $\mathcal{F}[x \cdot sgn(x)] = \frac{d}{d\omega}\, 2\mathcal{P}\left(\frac{1}{\omega}\right) = -2\mathcal{P}\left(\frac{1}{\omega^2}\right)$
Kis indoklás még elférne bizonyítandó, hogy $\frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x} = -\mathcal{P}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, de ne legyünk ennyire szigorúak....

F. 6 *A Dira-delta Fourier transzformáltja előáll* $\mathcal{F}[\delta(x)] =< \delta(x)|\lambda(x)e^{-i\omega x} >$ *alakban. Mi az itt szereplő* $\lambda(x)$ *és mi így* $\mathcal{F}[\delta(x)]$ *?*

Válasz:

$\lambda(x)$ tetszőleges $\mathcal{K}$ -beli függvény azzal a megszorítással, hogy $\lambda(x) = 1$ az $x = 0$ környezetében.
Így $\mathcal{F}[\delta(x)] =< \delta(x)|\lambda(x)e^{-i\omega x} >= \lambda(0)e^{-i\omega 0} = 1$

Speciális függvények

A megoldás előtt zárójelben feltüntetett számok a jegyzet vonatkozó képletét jelzik.

F. 7 *Adjuk meg a Gamma függvény segítségével az* $\int_0^\infty xe^{-x^3}dx$ *integrál értékét! Útmutatás:* $t^2 = x^3$ *helyettesítésnél* $\frac{2}{3}t^{1/3}dt = xdx$

Válasz:

(90): $\Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2z-1}dt$ használható, $\int_0^\infty xe^{-x^3}dx = \frac{2}{3}\int_0^\infty e^{-t^2}t^{1/3}dt = \frac{2}{3}\int_0^\infty e^{-t^2}t^{4/3-1}dt = \frac{1}{3}\Gamma(\frac{2}{3})$

F. 8 *Igazoljuk a Legendre polinomokra, hogy*

$$\int_0^1 P_n(x)dx = \frac{P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)}{2n+1} \quad , \quad n > 0$$

Válasz:

(34): $(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)$ segítségével. Integráljuk az egyenletet az adott határok között és vegyük figyelembe, hogy (17): $P_l(1) = 1$

F. 9 *Határozzuk meg az*

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & -1 < x < 0 \\ 1\,, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

függvény Fourier-Legendre sorát! Útmutatás: Használjuk fel az előző feladat állítását!

Válasz:

(31) $a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^1 f(x)P_n(x)dx = \frac{2n+1}{2}\int_0^1 P_n(x)dx = \frac{P_{n-1}(0)-P_{n+1}(0)}{2}$, $n > 0$
ízlés szerint még (21) $P_l(0) = ...$ beírható....
továbbá $a_0 = \frac{2n+1}{2}\int_0^1 dx = \frac{2n+1}{2}$

F. 10 *Bizonyítsuk, hogy* $Y_l^m(0,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m,0}$ *, (a z-tengelyen csak az* $m = 0$ *gömbfüggvények különböznek nullától)!*

Válasz:

(79): $Y_l^m(0,\varphi) = (-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}P_l^{|m|}(1)\,e^{im\varphi}$ de (58): $P_l^{|m|}(1) = 0$ ha $m \neq 0$ és $P_l^{(0)}(1) = P_l = 1$

F. 11 *A generátorfüggvény segítségével igazoljuk, hogy a* J_n *Bessel függvényeknek határozott paritása van:* $J_n(x) = (-1)^n J_n(-x)$

Válasz:

(177): $g(x,t) = e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$ és $g(-x,t) = g(x,-t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n J_n(x)t^n$

F. 12 *Bizonyítsuk be, hogy a Bessel függvényekre* $J_n(x_i) = \pm J_{n+2}(x_i)$ *azon* x_i *helyeken, ahol* J_{n+1} *-nek zéróhelye vagy extrémuma van.*

Válasz:

(191): $J_{n-1}(x_i) + J_{n+1}(x_i) = 0$, ha $J_n(x_i) = 0$ illetve $J_{n-1}(x_i) - J_{n+1}(x_i) = 0$ ha $J'_n(x_i) = 0$

F. 13 *A* $\varphi_n(x)$ *Hermite függvény kielégíti a* $\varphi''_n + (2n+1-x^2)\varphi_n = 0$ *differenciálegyenletet. Mutassuk meg, hogy a* φ_n *és* φ_m *,* $n \neq m$ *megoldások ortogonálisak. Útmutatás: Írjuk fel a* $\varphi''_n\varphi_m - \varphi''_m\varphi_n$ *különbséget, majd integráljuk...*

Válasz:

$\varphi''_n\varphi_m - \varphi''_m\varphi_n = [(2m+1) - (2n+1)]\,\varphi_n\varphi_m$
és $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi''_n\varphi_m dx = \varphi'_n\varphi_m|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\varphi'_n\varphi'_m dx = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n\varphi''_m dx$
innen $0 = [(2m+1) - (2n+1)]\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n\varphi_m dx$, azaz $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n\varphi_m dx = 0$ ha $n \neq m$