# Óravázlatok: Matematika 2.

Bartha Ferenc*

*készültség: March 4, 2003*

## 1. VEKTOR-SKALÁR FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLÁSA

Legyen a továbbiakban $M \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és $f : M \to \mathbb{R}$ valós függvény, $\mathbf{x} = (x_1, .., x_n) \in M$
Ha speciálisan $\mathbb{R}^2$-ről van szó, akkor $\mathbf{x} = (x, y)$, ha $\mathbb{R}^3$ esetén pedig $\mathbf{x} = (x, y, z)$ jelöléseket is fogjuk használni.

### 1.1. Parciális deriváltak

**Definíció 1** *Az $f(\mathbf{x})$ függvény $x_i$ szerinti **parciális deriváltja**, az $\mathbf{a} = (a_1, .., a_n)$ helyen*

$$\left.\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(a_1, ..., a_i + h, ..., a_n\right) - f\left(a_1, .., a_i, ..., a_n\right)}{h} \qquad i = 1, .., n \tag{1.1}$$

*már amennyiben a határérték létezik.*

A parciális derivált számolásakor tehát az összes $x_j$ , $j \neq i$ változót rögzítettnek tekintjük, majd a

$$h_i(x_i) = f\left(a_1, ..., x_i, ..., a_n\right) \tag{1.2}$$

egyváltozós függvény közönséges deriváltját határozzuk meg, azaz

$$\left.\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} = \left.\frac{d}{dx_i} h_i(x_i)\right|_{x_i=a_i} = \left.\frac{d}{dx_i} f\left(a_1, ..., x_i, ..., a_n\right)\right|_{x_i=a_i} \tag{1.3}$$

Az eredmény szempontjából általában mindegy, hogy az $x_j = a_j$ , $j \neq i$ rögzített értékeket a differenciálás előtt helyettesítjük-e be, vagy formálisan megtartjuk őket és a differenciálás után helyettesítünk.

**Példa 2** *Tekintsük az $f(x, y) = x^2 + y \cdot \cos\ x$ függvényt az $\mathbf{a} = (\pi, 0)$ pontban.*

Ekkor

$$h_x(x) = f(x, 0) = x^2 \quad \textit{és} \quad h_y(y) = f(\pi, y) = -y \tag{1.4}$$

ahonnan

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\mathbf{a}} = \left.\frac{d}{dx} h_x(x)\right|_{x=\pi} = \left.2x\right|_{x=\pi} = 2\pi \quad \text{valamint} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\mathbf{a}} = \left.\frac{d}{dy} h_y(y)\right|_{y=0} = -1 \tag{1.5}$$

Ugyanerre jutunk, ha az $x$-szerinti parciális derivált számolásakor $y$-t konstansnak tekintjük, és csak később helyettesítjük be az aktuális értékét

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\mathbf{a}} = \left.2x - y \cdot \sin\ x\right|_{(x,y)=(\pi,0)} = 2\pi - 0 \cdot \sin\ \pi = 2\pi \tag{1.6}$$

és az $y$-szerinti parciális derivált számolásakor az $x$ változót tekintjük rögzítettnek

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\mathbf{a}} = \left.\cos\ x\right|_{(x,y)=(\pi,0)} = \cos\ \pi = -1 \tag{1.7}$$

---

*Electronic address: barthaf@physx.u-szeged.hu

**Példa 3** $f(x,y) = x^3 + 3xy + y - 1$ , $\mathbf{a} = (4,-5)$ , $f_x = 2x + 3y$ , $f_x(\mathbf{a}) = -7$ , $f_y = 3x - 1$ , $f_y(\mathbf{a}) = 13$

Legyen $D \subseteq M$ azon pontok halmaza, ahol létezik a függvény parciális deriváltja. Ezen a halmazon az

$$\mathbf{a} \to \left.\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} \tag{1.8}$$

leképezések $n$ darab $n$-változós függvényt definiál. Ezeket a függvényeket sokféleképpen szokás jelölni, példaként néhány írásmód:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \partial_{x_i} f(\mathbf{x}) = \partial_i f(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}) \tag{1.9}$$

gyakran az argumentum kiírása nélkül.

**Gyakorló feladat 4** *Számoljuk ki a parciális deriváltakat, ha* $f(x,y) = \left(x^3 + y\right) \cdot \cos\ y^2$.
*M.o.:* $f_x = 3x^2 \cdot \cos\ y^2$ , $f_y = x^3 \cdot \cos\ y^2 - 2y\left(x^3 + y\right) \cdot sin\ y^2$

**Gyakorló feladat 5** $f(x,y) = e^{x^2 - 2xy}$ , $f_x = 2(x-y)f$ , $f_y = -2yf$

**Gyakorló feladat 6** $f(x,y) = y \cdot sin(xy)$ , $f_x = y^2 \cdot cos(xy)$ , $f_y = sin(xy) + xy \cdot cos(xy)$

**Gyakorló feladat 7** $f(x,y) = \frac{2y}{y+cos(x)}$ , $f_x = \frac{2y \cdot sin(x)}{(y+cos(x))2}$

Ha a parciális deriváltak egy nyílt halmazon léteznek, akkor ezeket a $\partial_i f(\mathbf{x})$ függvényeket újból differenciálhatjuk parciálisan az egyes vátltozóik szerint, azaz beszélhetünk a

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(\mathbf{x}) = f_{ij} \tag{1.10}$$

**másodrendű** parciális deriváltakról. Az azonos változóban elvégzett differenciálásnál szokás az

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(\mathbf{x}) \tag{1.11}$$

írásmód. Ha az egymás utáni differenciálásokat különböző változókban végezzük el, akkor **vegyes parciális deriváltakról** beszélünk.

**Példa 8** *Az* $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$ *függvény második deriváltjai*

$$f_x = 3x^2 + 2xy^3 \quad \textit{és} \quad f_y = 3x^2y^2 - 4y \tag{1.12}$$

*miatt*

$$(f_x)_x = f_{xx} = 6x + 2y^3 \quad , \quad (f_y)_y = f_{yy} = 6x^2y - 4 \quad , \quad (f_x)_y = f_{xy} = 6xy^2 \quad , \quad (f_y)_x = f_{yx} = 6xy^2 \tag{1.13}$$

Megfigyelhetjük, hogy most a vegyes parciális deriváltakra $f_{xy} = f_{yx}$. Ez nem véletlen, ugyanis

**Tétel 9** *Ha* $f_i$ , $f_j$ , $f_{ij}$ *és* $f_{ji}$ *mindegyike létezik az* **a** *pont egy környezetében és ott mindegyik folytonos, akkor*

$$f_{ij}(\mathbf{a}) = f_{ji}(\mathbf{a}) \tag{1.14}$$

A második parciális deriváltak eme **szimmetriájá**t kihasználhatjuk a számoláskor.

**Példa 10** *Legyen* $f(x,y) = xy + \frac{e^y}{y^2+1}$

A függvény sima függvények összetevéséből keletkezett, a nevező nem okozhat problémát, így joggal feltehetjük, hogy a deriváltjai a tételben megkövetelet feltételeknek eleget tesznek. Ekkor

$$f_x = y \quad \textit{és} \quad f_{xy} = 1 = f_{yx} \tag{1.15}$$

míg előbb meghatározva $f_y$-t, majd az eredmény differenciálva $x$ szerint a dolog lényegesen bonyolultabb lenne.

**Példa 11** $f(x,y) = x \cdot cos(y) + y \cdot e^x$ , $f_x = cos(y) + y \cdot e^x$ , $f_y = -x \cdot sin(y) + e^x$ , $f_{xx} = y \cdot e^x$ , $f_{yy} = -x \cdot cos(y)$ , $f_{xy} = -sin(y) + e^x$

Hasonló módon vezetjük be a magasabb rendű parciális deriváltakat. Ilyenek például az

$$f_{xxx} = \frac{\partial^3}{\partial x \partial x \partial x} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(\mathbf{x}) \quad , \quad f_{xxy} = \frac{\partial^3}{\partial y \partial x \partial x} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} f(\mathbf{x}) \quad , \quad \textit{stb.} \tag{1.16}$$

harmadrendű parciális deriváltak.

### 1.2. Differenciálhatóság

**Definíció 12** *Azt mondjuk, hogy $f(\mathbf{x})$* ***differenciálható*** *az* **a** *pontban, ha van* **a***-nak olyan $U(\mathbf{a})$ környezete, hogy*

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} D_i(\mathbf{x})(x_i - a_i) \quad , \quad \mathbf{x} \in U(\mathbf{a}) \tag{1.17}$$

*ahol a $D_i(\mathbf{x})$ , $i = 1, .., n$ függvények* ***folytonosak*** **a***-ban.*

**Tétel 13** *Ha $f(\mathbf{x})$* ***differenciálható*** *az* **a** *pontban, akkor ott az összes elsőrendű parciális deriváltja létezik.*

Nyilvánvaló, hogy a $D_i(\mathbf{a})$ érték $f(\mathbf{x})$-nek éppen az **a** helyen vett $x_i$ szerinti parciális deriváltja

$$D_i(\mathbf{a}) = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} = f_i(\mathbf{a}) \tag{1.18}$$

**Definíció 14** *$f(\mathbf{x})$ differenciálható a $D$ halmazon, ha annak minden pontjában differenciálható.*

**Tétel 15** *Ha a $D$ halmazon az összes $f_i$ folytonos, akkor $f(\mathbf{x})$ a halmaz minden pontjában differenciálható.*

### 1.3. Linearizáció

$D_i(\mathbf{x})$ folytonossága miatt írhatjuk, hogy

$$D_i(\mathbf{x}) = D_i(\mathbf{a}) + \varepsilon_i(\mathbf{x}) \quad \textit{és} \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \varepsilon_i(\mathbf{x}) = 0 \tag{1.19}$$

azaz a differenciálhatóság alternatív kritériuma, hogy

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} (x_i - a_i) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\mathbf{x})(x_i - a_i) \quad , \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \varepsilon_i(\mathbf{x}) = 0 \tag{1.20}$$

**Definíció 16** *Az $f(\mathbf{x})$ függvény* **a** *pont körüli linearizációjának az*

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{a})(x_i - a_i) \tag{1.21}$$

*függvényt nevezzük. Láthatóan ez a lineáris függvény annál jobban közelíti $f(\mathbf{x})$ értékét mennél közlebb van* **x** *az* **a** *ponthoz.*

***Tétel 17*** *Legyen a kétváltozós $f(x, y)$ függvényre $\mathbf{a} = (x_0, y_0)$. Ha $f$ olyan, hogy összes első- és másodrendű parciális deriváltjai léteznek a $T = \{(x, y)|$ ahol $|x - x_0| \leq a$ és $|y - y_0| \leq b\}$ téglában, és a második deriváltak itt korlátosak,azaz*

$$|f_{xx}|, |f_{yy}|, |f_{xy}| \leq M \tag{1.22}$$

*akkor a linearizáció hibája:*

$$|L(x, y) - f(x, y)| \leq \frac{1}{2} M \left(|x - x_0| + |y - y_0|\right)^2 \tag{1.23}$$

### 1.4. Differenciál

Bevezetve a

$$\Delta f = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) \quad , \quad \Delta x_i = (x_i - a_i) \quad , \quad o_i = \varepsilon_i(\mathbf{x})(x_i - a_i) \tag{1.24}$$

jelöléseket

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{a})\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} o_i \quad ahol \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{o_i}{x_i - a_i} = 0 \tag{1.25}$$

Ha $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|$ és így minden $\Delta x_i$ elegendően (**infinitezimálisan**) kicsiny, akkor a $\Delta$ megváltozások helyett $d$ jelöléssel és az $o_i$ eltűnő korrekció elhagyásával kapjuk, hogy

$$df = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{a})dx_i \tag{1.26}$$

**Definíció 18** *Az így definiált $df$ az $f$ függvény differenciálja.*

### 1.5. Összetett függvény

Ha az $x_i$ változók maguk is valamely $t$ változó differenciálható függvényei, azaz $x_i = x_i(t)$ akkor

**Tétel 19** *Lánc-szabály:*

$$\frac{df\,(\mathbf{x}(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} f_i \dot{x}_i \tag{1.27}$$

**Példa 20** *Implicit differenciálás: Tekintsük az $F(x,y) = 0$ egyenletet. Ez implicit módon meghatározza például az $y = y(x)$ függvényt. Az egyenlet mindkét oldalát differenciálva*

$$\frac{dF(x,y)}{dx} = 0 \tag{1.28}$$

*Az előző tétel alapján ugyanakkor*

$$\frac{dF(x,y)}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = F_x + F_y\frac{dy}{dx} \tag{1.29}$$

*A két egyenletből*

$$\frac{dy}{dx} = -F_x/F_y \tag{1.30}$$

**Tétel 21** *Lánc-szabály általánosabban: Ha $x_i = x_i(u_1,..,u_m)$, akkor*

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x_i(\mathbf{u})}{\partial u_k} du_k \tag{1.31}$$

*vagy*

$$\frac{\partial f\,(\mathbf{x}(\mathbf{u}))}{\partial u_k} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\frac{\partial x_i(\mathbf{u})}{\partial u_k} \tag{1.32}$$

### 1.6. Irány menti derivált

Láttuk, hogy egy $\mathbf{x}(t)$ görbe mentén

$$\frac{df\,(\mathbf{x}(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{n} f_i \dot{x}_i \tag{1.33}$$

Legyen speciálisan

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{u}\cdot t \qquad \|\mathbf{u}\| = 1 \tag{1.34}$$

Ez az $\mathbf{a}$ ponton átmenő $\mathbf{u}$ egységvektor irányában egy egyenes egyenlete. A $t$ paraméter nagysága megadja, hogy milyen távol vagyunk az $\mathbf{a}$ ponttól az egyenes mentén.

**Definíció 22** *Az* $f(\mathbf{x})$ *függvény* $\mathbf{u}$ *irány menti deriváltja az* $\mathbf{a}$ *pontban a*

$$(D_{\mathbf{u}}f)_{\mathbf{a}} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}(t)) - f(\mathbf{a})}{t} = \left(\frac{d}{dt}f(\mathbf{x}(t))\right)_{t=0} \tag{1.35}$$

A lánc szabály szerint

$$\frac{df(\mathbf{x}(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{dx_i(t)}{dt} \tag{1.36}$$

és most

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = u_i \tag{1.37}$$

tehát az irány menti derivált számolására használható formula:

$$(D_{\mathbf{u}}f)_{\mathbf{a}} = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{a})u_i \tag{1.38}$$

A függvény megváltozása, miközben az $\mathbf{a}$ pontból az $\mathbf{u}$ irányban $dt$ nagyságú infinitezimális lépést teszünk

$$df = (D_{\mathbf{u}}f)_{\mathbf{a}} \cdot dt \tag{1.39}$$

## 1.7. Gradiens

Figyelembe véve, hogy $\mathbb{R}^n$-ben két vektor belső szorzatán az

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \tag{1.40}$$

számot értettük, az iránymenti deriváltat egyszerűbben felírhatjuk, ha bevezetjük a

$$grad(f)(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) = (f_1(\mathbf{a}), ..., f_n(\mathbf{a})) \tag{1.41}$$

vektort (olvasd: "**gradiens f**", vagy "**nabla f**"). Ekkor

$$(D_{\mathbf{u}}f)_{\mathbf{a}} = \langle \nabla f, \mathbf{u}\rangle \tag{1.42}$$

és

$$df = \langle \nabla f, \mathbf{u}\rangle \cdot dt \tag{1.43}$$

Vegyük észre, hogy a növekmény ($df$) három, egymástól független dologból jön össze: a $\nabla f$ gradiens, az $\mathbf{u}$ irány és a $dt$ egymástól függetlenek.

Ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ irányított szakasz, akkor a belső szorzat másik értelmezése alapján

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = u \cdot v \cdot cos\ \theta \quad ahol \quad u = \|\mathbf{u}\| \quad , \quad v = \|\mathbf{v}\| \quad , \quad \theta = \measuredangle \mathbf{u}, \mathbf{v} \tag{1.44}$$

Ezekkel egy $\mathbf{u}$ egységvektor irányába való $dt$ mértékű lépésnél a függvény megváltozása

$$df = \|\nabla f\| \cdot cos\ \theta \cdot dt \tag{1.45}$$

Ha $\nabla f \neq 0$ és figyelembe véve, hogy $-1 \leq cos\ \theta \leq 1$ megállapíthatjuk a gradiens szemléletes jelentését: Az $f(\mathbf{x})$ függvény leggyorsabb növekedése $\mathbf{a}$-ból a gradiens irányába való ellépéskor várható, ekkor ugyanis

$$df = \|\nabla f\| \cdot dt \quad ha \quad \mathbf{u} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \tag{1.46}$$

míg a függvény a legnagyobb mértékű csökkenése ellenkező irányba lépve várható, amikor

$$df = -\|\nabla f\| \cdot dt \quad ha \quad \mathbf{u} = -\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \tag{1.47}$$

Ugyanakkor, ha az $\mathbf{u}$ irány merőleges a gradiensre, akkor

$$df = 0 \quad ha \quad \mathbf{u} \perp \nabla f \tag{1.48}$$

### 1.8. Számolási szabályok

A derivált számolásának a szabályait a parciális deriváltra alkalmazva megmutatható, hogy

$$\nabla(kf) = k\nabla f \quad ; \quad \nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g \quad , \quad \nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g \;\; ; \; \nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2} \tag{1.49}$$

### 1.9. Érintő, normális

Az előzőekben láttuk, hogy a $\nabla f$ vektor minden pontban a függvény leggyorsabb növekedésének irányába mutat. Azt is tudjuk, hogy a gradiens irányára merőlegesen ellépve a függvény értéke (lokálisan) nem változik. Ezeket a kijelentéseket a függvények szintfelületeivel hozhatjuk kapcsolatba. Az $f(\mathbf{x})$ függvény egy szintfelülete az az $n-1$ dimenziós (hiper)felület, amelyre

$$f(\mathbf{x}) = k \quad (konstans) \tag{1.50}$$

Így például $f(x,y) = k$ kétváltozós függvények esetén úgynevezett szintvonalak (görbék, 1-dimenziós felületek), $f(x,y,z) = k$ mellett kétdimenziós felületek a háromdimenziós térben, stb.

Bármely olyan $\mathbf{x}(t)$ görbét tekintsünk is, melyik a szintfelületben halad, mindenképpen

$$\frac{df(\mathbf{x}(t))}{dt} = \frac{d}{dt}k = 0 \tag{1.51}$$

A gradienssel kifejezve

$$\frac{df(\mathbf{x}(t))}{dt} = \langle \nabla f, \dot{\mathbf{x}}(t)\rangle = 0 \quad , \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \tag{1.52}$$

Szavakban kifejezve: Bármely, a szintfelületben haladó görbe $\dot{\mathbf{x}}(t)$ sebességvektora merőleges a gradiensre. A kijelentést megfordítva: A függvény gradiense az $\mathbf{a}$ pontban merőleges minden a szintfelőletben levő és az $\mathbf{a}$ ponton átmenő görbére, azaz $\nabla f$ **merőleges a szintfelületre**. Egy szintfelület **normálisa** a felületre merőleges egységvektor megadható tehát az

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \tag{1.53}$$

alakban. A **normális egyenes** paraméteres egyenlete

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{n}\cdot t = \mathbf{a} + \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\cdot t \tag{1.54}$$

Azt a síkot, ami tartalmazza az $\mathbf{a}$ pontot és a normális a gradiens irányába mutat a függvény $\mathbf{a}$ pontbelli **érintő síkjának** nevezzük. Ennek egyenlete

$$\langle \nabla f, (\mathbf{x} - \mathbf{a})\rangle = 0 \tag{1.55}$$

### 1.10. Taylor-polinom

Az egyváltozós függvényekhez hasonlóan bevezethető a többváltozós függvények Taylor-sorfejtése. Ez a sor az

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{a})(x_i - a_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) + ... \tag{1.56}$$

alakban írható fel a másodrendű tagig kiírva. Az elsőrendű tag után csonkolva a függvény már jól ismert lineáris közelítését kapjuk. Ha az elsőrendű parciális deriváltak valamely okból (lásd alább) nullák lennének, akkor a másodrendű taggal felírt sorfejtést a függvény harmonikus közelítése:

$$\nabla f|_{x=a} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) \tag{1.57}$$

### 1.11. Többváltozós függvények szélsőértéke

**Definíció 23** *Az $f(\mathbf{x})$ függvénynek **lokális maximuma** van az $\mathbf{a}$ pontban, ha van olyan $U(\mathbf{a})$ környezet, amire*

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) \quad ha \quad \mathbf{x} \in U(\mathbf{a}) \tag{1.58}$$

*Teljesen hasonlóan $f(\mathbf{x})$ **lokális minimuma** az $\mathbf{a}$ hely, ha*

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a}) \quad ha \quad \mathbf{x} \in U(\mathbf{a}) \tag{1.59}$$

*valamely $U(\mathbf{a})$ környezetben.*

**Tétel 24** *Ha $f(\mathbf{x})$ differenciálható és lokális szélsőértéke van $\mathbf{a}$-ban, akkor*

$$\nabla f|_{x=a} = 0 \tag{1.60}$$

Vegyük komolyan, hogy a szélsőérték létezése differenciálható függvényeknél szükségessé teszi, hogy a függvény gradiense eltűnik a kérdéses pontban, de a tétel megfordítása nem igaz. Azaz egyáltalán nem szükségszerű, hogy azokban a pontokban, ahol a gradiens nulla a függvénynek szélsőértéke legyen.

**Definíció 25** *Azokat a pontokat, ahol $\nabla f = 0$ a függvény **kritikus pontjainak** nevezzük.*

**Definíció 26** ***Nyeregpontnak** nevezzük azokat az $\mathbf{a}$ kritikus pontokat, melyek bármelyik környezetében van olyan $\mathbf{x}$ és $\mathbf{x}'$ hely, amire*

$$f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a}) \qquad és \qquad f(\mathbf{x}') > f(\mathbf{a}) \tag{1.61}$$

*egyaránt teljesül.*

A Taylor-sor kapcsán láttuk, hogy kritikus pontokban a függvény másodrendben a

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) \tag{1.62}$$

formulával közelíthető. A kérdés tehát az, hogy ezen kifejezés alapján hogyn lehet eldönteni, hogy a kritikus pont lokális szélsőérték-e, avagy nyeregpont. A válasz némi további algebrai-geometriai ismeretet igényel. Azt kellene megvizsgálnunk, hogy milyen feltételek mellett teljesül, hogy

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) \tag{1.63}$$

amikor is lokális minimum van, vagy

$$0 \geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) \tag{1.64}$$

amikor lokális maximumot találtunk. Ha vannak olyan $\mathbf{x}$-ek $\mathbf{a}$ körül, melyekre a kifejezés pozitív, de olyanok is, melyekre negatív, akkor nyeregpontról lehet szó. A megfelelő eszközök hiányában az osztályozást az alábbi tételben (csak kétváltozós függvényekre) mondjuk ki.

Legyen $f(x, y)$ egy differenciálható függvény és $\mathbf{a} = (x_0, y_0)$ egy kritikus pont, azaz $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$. A másodrendű parciális deriváltakból (az $f_{ij} = f_{ij}(x_0, y_0)$ rövidített jelölésekkel) készítsük el a

$$^2D = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \tag{1.65}$$

mátrixot. A mátrix determinánának nevezzük a

$$d = det\left({}^2D\right) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{xx} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \tag{1.66}$$

mennyiséget. Szokás ezt a $d$-t **diszkriminánsnak** is nevezni.

**Tétel 27** *Az $f(x, y)$ differenciálható függvénynek a $\nabla f|_{x=a} = 0$ kritikus pontban*
*- lokális maximuma van, ha $f_{xx}(\mathbf{a}) < 0$ és $d > 0$*
*- lokális minimuma van, ha $f_{xx}(\mathbf{a}) > 0$ és $d > 0$*
*- nyeregpontja van, ha $d < 0$*
*- nem eldönthető (ennyi információból), ha $d = 0$*

### 1.12. Feltételes szélsőérték

Nagyjából tudjuk már, hogy hogyan keressük meg egy többvátltozós függvény 'feltétel nélküli' extrémumait. Feltétel nélkül abban az értelemben, hogy a függvény értelmezési tartományát, így a lokális szélsőértékek lehetséges helyét további megszorítások nem korlátozzák. Gyakori feladat ezzel szemben az, hogy a független változók nem vehetnek fel tetszőleges értéket, hanem azokra valamilyen feltételt, kényszert írunk elő.

Most csak olyan kényszerekkel foglalkozunk, amikor azok

$$g_k(\mathbf{x}) = 0 \quad k = 1, ..., m < n \tag{1.67}$$

egyenletek alakjába írhatók.

Az egyszerűség kedvéért tekintsünk először egyetlen kényszert

$$g(\mathbf{x}) = 0 \tag{1.68}$$

ami tehát egy (hiper)felület egyenlete az $n$-dimenziós térben. Azt a kérdést kívánjuk megválaszolni,. hogy mik lehetnek az $f(\mathbf{x})$ függvény extrémális helyei, ha az argumentumába csak olyan $\mathbf{x}$ értékeket írunk, melyek a hiperfelületen vannak.

Erre két lehetséges eljárás adódik. Az első módszer a kényszer **explicit** figyelembe vételét jelenti. Elve nyilvánvaló, bár a gyakorlatban csak egyszerű kényszerek esetén használható. Akkor használjuk, ha a feltételből például kifejezhető valamelyik változó, mint a többi függvénye. Legyen ez az $x_1$ változó, ekkor tehát

$$g\left(x_1, .., x_n\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_1\left(x_2, .., x_n\right) \tag{1.69}$$

Ezt $f(\mathbf{x})$ függvénybe beírva

$$f\left(x_1, .., x_n\right) = f\left(x_1\left(x_2, .., x_n\right), .., x_n\right) = h\left(x_2, .., x_n\right) \tag{1.70}$$

egy $n-1$ változós $h\left(x_2, .., x_n\right)$ függvényt kapunk. Ennek a függvénynek már kereshetjük a feltétel nélküli szélsőértékét. Az eljárás több kényszer esetén is alkalmazható, azonban nehézkessé válhat és nagy körültekintést igényel.

**Példa 28** *Melyik pontja van a*

$$2x + y - z - 5 = 0 \tag{1.71}$$

*síknak a legközelebb az origóhoz?*

A feladatot úgy fogalmazzuk át, hogy keressük az $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$ (origótol mért távolság négyzete) függvény szélsőértékét, miközben az $(x, y, z)$ pontok eleget tesznek a $g(x, y, z) = 2x + y - z - 5 = 0$ kényszernek. Lehetséges explicit megoldás, ha a kényszerből kifejezzük, hogy pl.

$$2x + y - 5 = z(x, y) \tag{1.72}$$

és ekkor a síkon levő pontokra

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (2x + y - 5)^2 = h(x, y) \tag{1.73}$$

A keresett szélsőérték helyekre

$$h_x = 2x + 2 \cdot (2x + y - 5) \cdot 2 \qquad , \qquad h_y = 2y + 2 \cdot (2x + y - 5) \tag{1.74}$$

mely lineáris egyenletrendszert megoldva

$$x = \frac{5}{3} \quad y = \frac{5}{6} \tag{1.75}$$

amit visszahelyettesítve a kényszerfeltételbe

$$2x + y - 5 = 2\frac{5}{3} + \frac{5}{6} - 5 = \frac{20 + 5 - 30}{6} = -\frac{5}{6} = z \tag{1.76}$$

A keresett (minimális) távolságnál tehát

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{-5}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{150}{36}} = \frac{5}{\sqrt{6}} \tag{1.77}$$

Ezzel szemben a **Lagrange-féle multiplikátoros módszer** könnyen automatizálható. Ez a következő eljárást jelenti:

**Tétel 29** *Az $f(\mathbf{x})$ differenciálható n-változós függvénynek a $g_k(\mathbf{x}) = 0 \quad k = 1, ..., m < n$ differenciálható feltételek melletti szélsőértékeit megkaphatjuk, ha az*

$$F(\mathbf{x},\lambda_1, .., \lambda_m) = f(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(\mathbf{x}) \tag{1.78}$$

*$n + m$ változós függvény feltétel nélküli szélsőértékeit meghatározzuk.*

A feltétel nélküli szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy

$$\frac{\partial F(\mathbf{x},\lambda_1, .., \lambda_m)}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, .., n \quad \text{és} \quad \frac{\partial F(\mathbf{x},\lambda_1, .., \lambda_m)}{\partial \lambda_k} = 0 \quad k = 1, .., m \tag{1.79}$$

legyen. Ez $n + m$ darab egyenlet, melyből a kritikus $(x_1, .., x_n, \lambda_1, .., \lambda_m)$ értékek elvileg meghatározhatók. Az egyenletek konkrétabban

$$\frac{\partial F(\mathbf{x},\lambda_1, .., \lambda_m)}{\partial x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0 \quad \equiv \quad \nabla f = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \nabla g_k(\mathbf{x}) \tag{1.80}$$

és

$$\frac{\partial F(\mathbf{x},\lambda_1, .., \lambda_m)}{\partial \lambda_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad g_k(\mathbf{x}) = 0 \tag{1.81}$$

**Példa 30** *A korábban explicit módszerrel megoldott problémánkban*

$$g(x, y, z) = 2x + y - z - 5 = 0 \tag{1.82}$$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \tag{1.83}$$

Ekkor

$$f_x = \quad 2x = +2\lambda \quad = \lambda g_x \tag{1.84}$$

$$f_y = \quad 2y = +1\lambda \quad = \lambda g_y \tag{1.85}$$

$$f_z = \quad 2z = -1\lambda \quad = \lambda g_z \tag{1.86}$$

$$0 = 2x + y - z - 5 \tag{1.87}$$

Az első három egyenletet az utolsóba helyettesítve

$$0 = 2x + y - z - 5 = (2\lambda) + \left(\frac{1}{2}\lambda\right) - \left(\frac{-1}{2}\lambda\right) - 5 = 3\lambda - 5 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{5}{3} \tag{1.88}$$

majd ebből

$$x = \lambda = \frac{5}{3} \qquad y = \frac{1}{2}\lambda = \frac{5}{6} \qquad z = -\frac{1}{2}\lambda = -\frac{5}{6} \tag{1.89}$$

mint korábban volt.

**Példa 31** *Keressük meg az $f(x, y) = xy$ függvény szélsőértékeit, ha $(x, y)$ csak a*

$$g(x, y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \tag{1.90}$$

*ellipszisről vehető!*

A Lagrange-egyenletek:

$$y = \lambda \frac{x}{4} \quad \text{és} \quad x = \lambda y \tag{1.91}$$

ahonnan

$$y = \frac{\lambda^2}{4} y \tag{1.92}$$

Ha $y = 0$, akkor $x = 0$ és a $0 = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1$ kényszer nem teljesülhet. Más esetben viszont

$$\frac{\lambda^2}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2y \tag{1.93}$$

amit a feltételbe visszaírva

$$\frac{(\pm 2y)^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = y^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1 \tag{1.94}$$

Az így kapott négy kritikus pont

$$(x, y): \ (\pm 2, 1) \ \ (\pm 2, -1) \tag{1.95}$$

ahol a függvény értéke

$$f(x, y) = xy = \pm 2 \tag{1.96}$$

lehet. A négy pontból kettő maximum, kettő minimum, mint azt némi utángondolással beláthatjuk.

**Gyakorló feladat 32** $f(x, y) = 3x + 4y\ ,\ g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$
*M.o.:* $x = \pm\frac{3}{5}\ ,\ y = \pm\frac{4}{5}$

**Gyakorló feladat 33** $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2\ ,\ g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0\ ,\ g_2(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$
*M.o.:* $(1, 0, 0)$ *és* $(0, 1, 0)$ *maximumok;* $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \mp \sqrt{2}\right)$ *minimumok*

**Gyakorló feladat 34** $f(x, y) = 49 - x^2 - y^2\ ,\ g(x, y) = x + 3y - 10 = 0$
*M.o.:* $f(x, y) = 39$

**Gyakorló feladat 35** *A* $g(x, y) = x^2y - 2 = 0$ *görbe melyik pontja van legközelebb az origóhoz?*

**Gyakorló feladat 36** *Az* $x^2/16 + y^2/9 = 1$ *ellipszisbe téglalapot rajzolunk. Melyik ilyen téglalapnak lesz a legnagyobb a területe?*

**Gyakorló feladat 37** *Milyen adatai (sugár, magasság) vannak annak a hengeres tartálynak, melynek térfogata* $V = 16\pi\ cm^3$ *és a készítéséhez a minimálisan szükséges lemezt használták fel? Számítsuk ki explicit- és Lagrange-módszerrel is!*
*M.o.:* $r = 2\ cm,\ h = 4\ cm$

**Gyakorló feladat 38** *Egy siklemezen a hőmérséklet változását a* $T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$ *függvény írja le. Egy hangya* $R = 5$ *sugarú körön futkározik a lemezen. Hol érzékeli a legalacsonyabb, hol a legmagasabb hőmérsékletet?*

**Gyakorló feladat 39** *Ha x mennyiségű vegyszert használunk fel az A típusúból és y mennyiségűt a B-ből, akkor a keletkezett terméken a haszon* $U(x, y) = xy + 2x$*. Az x vegyszer ugyanakkora mennyisége kétszer annyiba kerül, mint az y vegyszeré. Mennyit vásároljunk az egyes vegyszerekből, ha a maximális hasznot szeretnénk elérni adott befektetéssel? Mennyi lesz ekkor a haszon?*

**Gyakorló feladat 40** *A* $g_1(x, y, z) = y + 2z - 12 = 0$ *és a* $g_2(x, y, z) = x + y - 6 = 0$ *síkok metszésvonalának melyik pontja van legközelebb az origóhoz?*
*M.o.:* $(2, 4, 4)$