# A határozott integrál

*Bevezető probléma:* Egyenes úton egy autó időben változó $v(t) = ds/dt$ sebességgel halad. A mindenkori sebesség ismeretében szeretnénk kiszámolni, hogy mekkora utat tesz meg valamely $a \le t \le b$ időintervallumban.

- Ha ismernénk $v(t)$ egy $F(t)$ antideriváltját, akkor $s = F(t) + C$ és így $s_{ab} = F(b) - F(a)$ lenne.
- Ha $F(t)$ nem ismert, akkor az $[a, b]$ intervallumot felosztanánk kis $\Delta t_1 \cup \Delta t_2 \cup ... \cup \Delta t_n$ részintervallumokra, úgy, hogy ezek mindegyikén a sebesség közelítőleg állandónak legyen vehető. Ha a $\Delta t_i$ részintervallumon a sebesség közelítőleg $v_i$ állandó értéknek vehető, akkor $s_{ab} \approx v_1 \cdot \Delta t_1 + v_2 \cdot \Delta t_2 + ... + v_n \cdot \Delta t_n$

Reméljük, hogy annál pontosabb lesz az iménti becslésünk, minél finomabb beosztását vesszük az $[a, b]$ intevallumnak.

## a) a Riemann összeg

Tekintsünk egy $y = f(x)$ (folytonos) függvényt az $[a, b]$ intevallumon. Osszuk fel az intervallumot $n - 1$ belső pont felvételével $n$ részintervallumra

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_{n-1} < b = x_n$$

*Definíció:* $P = \{x_0, x_1, x_2, ...., x_{n-1}, x_n\}$ az $[a, b]$ intervallum egy **beosztása**.
Egy beosztásban a $k$-adik részintervallum $[x_{k-1}, x_k]$, ennek hossza $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$
*Definíció:* Mindegyik részintervallumon valamely (tetszőleges) $c_k$ pontot kijelölve, $x_{k-1} \le c_k \le x_k$ az

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \tag{0.1}$$

összeg az $f(x)$ függvény egy **Riemann** összege az $[a, b]$ intervallumon.
Speciális Riemann összeget kapunk, ha minden részintervallumon az iménti összegbe $f(c_k)$ helyett a függvénynek a megfelelő részintervallumon vett infimumát vagy szuprémumát írjuk

$$S_{m,P} = \sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k \quad \text{ahol} \quad m_k = \underset{x\in[x_{k-1},x_k]}{inf} \{f(x)\} \qquad \text{alsó összeg} \tag{0.2}$$

$$S_{M,P} = \sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k \quad \text{ahol} \quad M_k = \underset{x\in[x_{k-1},x_k]}{sup} \{f(x)\} \qquad \text{felső összeg} \tag{0.3}$$

Nyilvánvaló, hogy

$$S_{m,P} \le S_P \le S_{M,P}$$

*Definíció:* Egy $P$ beosztás normája: $\|P\| \doteq max_k \{\Delta x_k\}$, azaz a leghosszabb részintervallum hossza.
*Definíció:* Ha az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumon korlátos és az intervallum egyre finomodó $P$ beosztásaira

$$\underset{\|P\|\to 0}{lim} S_{m,P} = \underset{\|P\|\to 0}{lim} S_{M,P} = I \tag{0.4}$$

mindkét határérték létezik és egyenlő az $I$ (véges) számmal, akkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ integrálható az $[a, b]$ intervallumon és ott a **határozott integrálja** az $I$ szám.
*Tétel:* Az $[a, b]$ intervallumon az $f(x)$ függvény pontosan akkor integrálható, ha bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $\delta$, hogy az $[a, b]$ minden olyan beosztására, amire

$$\|P\| < \delta \text{ következik, hogy } |S_P - I| < \varepsilon \text{ azaz } \left|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k - I\right| < \varepsilon \tag{0.5}$$

a $c_k \in [x_k, x_{k-1}]$ bármilyen választása mellett.

Ha létezik ez az $I$ határérték, akkor azt a következőképpen jelöljük

$$I = lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx \tag{0.6}$$

elnevezése: $f(x)$ **határozott integrálja** $a$-tól $b$-ig.
*Szóhasználat*: $\int$ integrál jel; $[a, b]$ integrációs (integrálási) tartomány; $a|b$ az integrálás alsó|felső határa; $f(x)$ integrandus; $x$ integrációs változó
*Megjegyzés:* A határozott integrál értéke csak az integrálandó függvénytől és az intervallumtól függ, független attól, hogy hogyan jelöljük az integrációs változót. Azaz pl.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du \tag{0.7}$$

*Probléma*: A Riemann összegek nagyon sokfélék lehetnek, függően attól, hogy milyen beosztást választunk és milyen $c_k$ pontokat szemelünk ki a részintervallumokban. A sok lehetséges közelítő összeg mindig ugyanahhoz az $I$ számhoz tart, ha $\|P\| \to 0$ ???
*Tétel:* (1854, Riemann) Minden folytonos függvény integrálható. Pontosabban, ha $f(x)$ folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor ott létezik a határozott integrálja.
*Példa*: $\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$. Legyen ugyanis a beosztás olyan, hogy $P = \{x_k|\ x_k = k\Delta x,\ k = 0, 1, ..n,\ \Delta x = b/n\}$ és válasszuk minden részintervallumon a $c_k = x_k$ pontokat. Ekkor $f(c_k) = (k\Delta x)^2$ és a Riemann összeg

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} k^2 (\Delta x)^3 = (b/n)^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Az összeg határértéke

$$lim_{n\to\infty}\ S == \frac{b^3}{3} lim_{n\to\infty} \frac{1(1+1/n)(2+1/n)}{2} = \frac{b^3}{3}$$

Ha az integrál létezik (ha minden más Riemann összeg ehhez a számhoz konvergál), akkor $I = b^3/3$. Az $f(x) = x^2$ azonban folytonos függvény, így ezt joggal hihetjük.

## b) Területszámítás

Rajzoljuk fel az $y = f(x)$ függvény grafikonját az $(x, y)$ síkon. Az $[a, b]$ intervallum egy beosztása az $x$-tengelyen pontokat jelöl ki. Az $[x_{k-1}, x_k]$ részintervallumon téglalapot rajzolunk az $x$-tengelytől a függvény $y_k = f(c_k)$ értékéig. A téglalap előjeles területe ekkor $T_k = f(c_k)\Delta x_k$.

- Nemnegatív függvényekre az összes ilyen elemi téglalap területe **szemléletesen** közelíti a grafikon alatti felületet
- A beosztás finomításával a kérdéses terület egyre jobban "hasonlít" a görbe alatti tényleges felülethez

Kérdés: A beosztás elemi téglalapjainak az együttes területe tényleg a felület "közönséges" területét közelíti?
*Definíció:* Az $[a, b]$ intervallumon adott nemnegatív $f(x)$ függvény grafikonja alatti terület nagysága

$$T = \int_a^b f(x)dx \tag{0.8}$$

*Példa*: Számoljuk ki az $y = x^2$ és az $y = 1$ függvények görbéje által határolt síkidom területét. Ez $2 * 1 - \int_{-1}^{1} y(x)dx = 4/3$
*Megjegyzés:* Ha a függvény nem mindenhol pozitív, akkor

$$\int_a^b f(x)dx = T_+ - T_- \tag{0.9}$$

az $x$-tengely fölötti területek összegéből levonva az $x$-tengely alatti terület nagyságát.

## c) Középérték

Tekintsünk egy $y = f(x)$ folytonos függvényt az $[a, b]$ intervallumon. Osszuk fel az intervallumot $n$ egyenlő részre, a beosztásban ekkor $\Delta x = (a - b)/n$ egyforma hosszúságú részintervallumok lesznek. Mindegyik részintervallumon válasszunk ki egy $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ pontot. A függvényből vett $f(c_k)$ minták átlaga ekkor

$$\frac{f(c_1) + f(c_2) + ... + f(c_n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k) = \frac{1}{n\Delta x}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x = \frac{1}{b-a} S_n \qquad (0.10)$$

Azaz a függvény így elkészített átlag-, vagy középértéke a Riemann összeg osztva az intervallum hosszával. A beosztás finomításával egy határozott értékhez tartunk:
*Definíció:* Ha $f(x)$ integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor $\bar{f}$, az $f(x)$ $[a, b]$-n vett átlaga

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (0.11)$$

*Megjegyzés:* Ha $f(x)$ nemnegatív, akkor ez a szám a grafikonja alatti terület osztva az intervallum hosszával.

## d) A határozott integrál tulajdonságai

- Definíció: $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Definíció: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- Additivitás intervallum szerint: $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

**Lineáris művelet**:

- $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- ill. kombinálva:
  Tetszőleges $\{\lambda, \lambda_2, ..., \lambda_m\}$ konstansok és az $[a, b]$-n integrálható $\{f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)\}$ függvényekre

$$\int_a^b \left\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)\right\} dx = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \int_a^b f_i(x)dx \qquad (0.12)$$

*Példa*: $f(x) = \left|4 - x^2\right|$ függvény görbéje és az $x$ tengely közötti terület nagysága a $[0, 3]$ intervallumon.

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$$
$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 4dx - \int_0^2 x^2dx = 4\,(2-0) - \frac{2^3}{3} = \frac{16}{3}$$
$$\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 x^2dx - \int_2^3 4dx = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} - 4\,(3-2) = \frac{7}{3}$$

## e) Egyenlőtlenségek, középértéktétel

- **Max-Min egyenlőtlenség**

$$(b-a)\cdot min_{[a,b]}\{f(x)\} \le \int_a^b f(x)dx \le (b-a)\cdot max_{[a,b]}\{f(x)\} \qquad (0.13)$$

másképp mondva $(b-a)\cdot min_{[a,b]}\{f(x)\}$ alsó, $(b-a)\cdot max_{[a,b]}\{f(x)\}$ felső korlátja a határozott integrálnak.

*Példa*: $0 \leq \int_0^a \sqrt{1+cos(x)}dx \leq a\sqrt{2}$

- **Középértéktétel**: Ha $f(x)$ folytonos, akkor létezik olyan $c$ pont az $[a, b]$ intervallumban, ahol $f(x)$ felveszi középértékét:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \bar{f} \tag{0.14}$$

  Bizonyítás: Az előzőből $min\{f\} \leq \bar{f} \leq max\{f\}$ és használjuk fel, hogy folytonos függvény zárt intervallumon felveszi a maximuma és a minimuma közti összes értéket. Azaz kell lennie olyan pontnak, ahol $f(c) = \bar{f}$

*Példa*: $f(x) = 4 - x^2$ átlaga a $[0, 3]$ intervallumon

$$\frac{1}{3}\int_0^3 f(x)dx = \frac{1}{3}\left(4*3 - \frac{3^3}{3}\right) = 1$$

Ezt az értéket a $4 - x^2 = 1,\ x = \pm\sqrt{3}$ pontokban veszi fel. Ezek közül az $x = +\sqrt{3}$ valóban az intervallum belsejében van.
*Példa*: Ha $\int_a^b f(x)dx = 0$ valamely folytonos függvényre és valamely intervallumra, akkor $f(x) = 0$ legalább egyszer az intervallum belsejében.

- **Monitonitás**: Ha $f(x) \geq g(x)$ integrálhatók az $[a, b]$ intervallumban, akkor

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \tag{0.15}$$

*Példa*: A trigonometriából ismert, hogy $cos(x) = cos^2(\frac{x}{2}) - sin^2(\frac{x}{2}) = 1 - 2\ sin^2(\frac{x}{2})$. Továbbá $sin^2(t) \leq t^2$ és így

$$\int_0^1 cos(x)dx \geq \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)dx = 1 - \frac{1}{2}\frac{1^3}{3} = \frac{5}{6} \approx 0.83$$

### f) A határozott integrál kiszámítása, a Newton-Leibniz formula

Tekintsük az

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{0.16}$$

határozott integrált, mint a felső határ függvényét. Minden $x$-hez egy számot rendeltünk, mint ilyen $F(x)$ tehát a felső határ függvénye.
*Tétel:* $F(x)$ **folytonos** függvény (Bizonyítás az következő tétel bizonyításának elemeit felhasználva HF!)
*Tétel:* A kalkulus alaptétele I. rész
Ha $f(t)$ folytonos, akkor $F(x)$ **differenciálható** és

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Azaz $F(x)$ ekkor az $f(x)$ egy antideriváltja vagy primitív függvénye.
*Bizonyítás:* A derivált definíciójára gondolva felírjuk az

$$D_hF(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

differencia hányados értékét és megmutatjuk, hogy $D_hF(x) \to f(x)$ miközben $h \to 0$.

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

az integrálok additivitása miatt. A középértéktétel alapján azonban létezik olyan $c$ pont az $[x, x+h]$ intervallumban, amire

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)$$

Nyilvánvaló, hogy miközben $h \to 0$ az $[x, x+h]$ intervallum az $x$-re zsugorodikból és így $lim_{h\to 0}f(c) = f(x)$, azaz

$$\frac{d}{dx}F(x) = lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = lim_{h\to 0}f(c) = f(x)$$

*Példa*: Határozzuk meg az $\frac{d}{dx}F(x)$ függvényt, ha $F(x) = \int_1^{x^2} cos(t)dt$. Közvetett függvényt célszerű használni, legyen $u = x^2$. Ekkor

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{dF(u)}{du}\frac{du}{dx} = 2x\frac{d}{du}\int_1^u cos(t)dt = 2x\ cos(u) = 2x\ cos(x^2)$$

*Tétel:* A kalkulus alaptétele II. rész: a **Newton-Leibniz formula**

Ha az $[a, b]$ intervallumon $f(x)$ folytonos és $F(x)$ az $f$ valamely (bármely) antideriváltja (primitív függvénye), akkor

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = F|_a^b$$

*Bizonyítás:* Az előző tételben definiált $F(x)$ mint a felső határ függvénye $f(x)$ egy antideriváltja. $f(x)$ egyéb antideriváltjai ettől csak konstansban térhetnek el

$$\tilde{F}(x) = F(x) + C$$

Bármelyik antideriváltat is használjuk

$$\tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = \{F(b)+C\} - \{F(a)+C\} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

ami bizonyítja a tétel állítását.
*Példa*:

$$\int_0^\pi cos(t)dt = sin(t)|_0^\pi = sin(\pi) - sin(0) = 0$$

$$\int_a^b x^n dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right) \quad \text{ahol } n \neq -1$$

## g) Numerikus integrálás

Mi van akkor, ha nem találjuk a primitív függvényt? Mert esetleg nem is létezik, mint pl. $\frac{\sin(x)}{x}$-nek, vagy $\sqrt{1+x^2}$-nek nincs primitív függvénye. A numerikus integrálás során többnyire az $[a, b]$ intervallumot $n$ egyenlő részre vágjuk (ekvidisztáns beosztás). Egy részintervallum hossza $h = (b-a)/n$. A függvénynek az $\{x_k |\ x_k = a + kh,\ k = 0, 1, ..., n\}$ pontokban felvett $y_k = f(x_k)$ értékeit kiszámítjuk. Az így kapott $n+1$ számmal különböző kifejezéseket írhatunk fel, melyek a mindegyike az $\int_a^b f(t)dt$ szám egy közelítése.

**Téglány szabály**: közönséges Riemann összeget számolunk Erre láttunk példát korábban. Ritkán használjuk, mert az alább ismertetendő módszerek ugyanakkora számolási munkával általában jobb eredményt adnak.

**Trapéz szabály**: A függvény grafikonján minden részintervallumon **egyenes vonallal** összekötjük az $(x_k, y_k)$ és az $(x_{k+1}, y_{k+1})$ egymás utáni pontokat. Az $x$-tengely megfelelő pontjaival így egy trapéz alakult ki. Egy ilyen trapéz területe

$$T_k = \frac{h}{2}\{y_k + y_{k+1}\}$$

az elemi trapézok által lefedett összes terület pedig

$$T = \frac{h}{2}\left\{[y_0 + y_1] + [y_1 + y_2] + ... + [y_{n-1} + y_n]\right\} = \frac{h}{2}\left\{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + ... + 2y_{n-1} + y_n\right\} \approx \int_a^b f(t)dt \tag{0.17}$$

*Példa*: Kiszámoljuk $n = 4$ mellett az $f(x) = x^2$ integrálját az $[1, 2]$ intervallumon. Ekkor $h = 1/4$ és

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 1 | 5/4 | 6/4 | 7/4 | 2 |
| $y_k$ | 1 | 25/16 | 36/16 | 49/16 | 4 |

A trapéz formulába helyettesítve kapjuk, hogy

$$\int_1^2 x^2 dx \approx \frac{1}{8}\left\{1 + 2\frac{25}{16} + 2\frac{36}{16} + 2\frac{49}{16} + 2\right\} = \frac{75}{32} = 2.34375$$

Persze ezt az integrált már pontosan kiszámoltuk, tudjuk, hogy

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3} = 2.3\bar{3}$$

Láthatóan az 5 pontból számolt közelítés "egész jó".

Más integrálok számolásánál, amikor a pontos értéket nem ismerjük, szükségünk lehet valami támpontra, hogy a numerikus eredményünk mennyire jól közelíti az integrál valódi értékét. Megmutatható, hogy:
*Tétel:* Ha az $f^{(2)}$ (második derivált) folytonos az $[a, b]$-n és létezik olyan $M_2$ felső korlát, hogy $\left|f^{(2)}\right| \leq M_2$ az egész intervallumon, akkor a közelítés hibájára igaz, hogy

$$E_T = \left|\int_a^b f(t)dt - T\right| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2 \tag{0.18}$$

*Példa*: Az előbbi számoláshoz kapcsolódva $f^{(2)}(x) = 2$, így

$$E_T \leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^2 2 = \frac{1}{96} = 0.01041\bar{6}$$

Az számolásunkban most speciálisan pontosan ekkora a hiba, tehát a $\leq$ becslésben épp az egyenlőség teljesül. Ez nem általános, a becslés valójában **felső korlát a hiba nagyságára**.
*Példa*: Korlátot adunk az

$$\int_0^\pi x\ sin(x)\ dx$$

trapéz szabály használatával való integrálásakor a hiba nagyságára. Ehhez szükséges az integrandus második deriváltja:

$$(x\ sin(x))' = sin(x) + x\ cos(x)$$
$$(x\ sin(x))'' = cos(x) + cos(x) - x\ sin(x)$$

melyet felül becsülünk a kérdéses intervallumon:

$$\left|(x\ sin(x))''\right| \leq 2\left|cos(x)\right| + x\left|sin(x)\right| \leq 2 + \pi \leq 6$$

A $[0, \pi]$-n az utolsó egyenlőtlenségekben szigorúbb becslést is írhattunk volna, de a célnak így is megfelel. A hiba tehát

$$E_T \leq \frac{\pi}{12}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 6 = \frac{\pi^3}{2}\frac{1}{n^2}$$

ami $n = 10$ esetben $E_T \leq 0.155...$ , míg $n = 100$-ra $E_T \leq 0.00155$

Azt gondolhatnánk, hogy nagyon kis $h$-t választva tetszőleges pontosságot érhetnénk el. A gyakorlatban azonban nem lehet tetszőlegesen kis $h$-t használni. Ennek két fő oka van. A nagyon kis $h$ használata sok osztópontot jelent és egy komplikáltabb integrandus esetén az $y_k$ függvényértékek kiszámolása, tárolása, kezelése túl nagy munkát jelent. A másik probléma, hogy a számítógépek csak véges pontossággal számolnak (tipikusan 10-20 értékes tizedesjegyre), így a hiba nem tehető tetszőlegesen kicsinnyé. A következő eljárás ugyanakkora beosztás mellett, ugyanakkora számolási munkával várhatólag jobb eredményt ad a trapéz összegnél.

**Simpson szabály**: Az $[a, b]$ intervallumot *páros számú*, egyenlő hosszúságú részintervallumra osztjuk. Minden részintervallum *páron* másodfokú polinommal $y(x) = Ax^2 + Bx + C$ közelítjük a függvényt. Egy ilyen polinom integrálja egy intervallum páron

$$\int_{-h}^{h} y(x)dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

Ezeket összeadva

$$\begin{aligned} S &= \frac{h}{3}\left\{(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + ... + (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)\right\} \\ &= \frac{h}{3}\left\{y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + ... + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right\} \\ &\approx \int_a^b f(t)dt \end{aligned} \tag{0.19}$$

A közelítés hibája:
*Tétel:* Ha $f^{(4)}$ (negyedik derivált) folytonos az $[a, b]$-n és létezik olyan $M_4$ felső korlát, hogy $\left|f^{(4)}\right| \leq M_4$ az egész intervallumon, akkor

$$E_S \leq \frac{b-a}{180} h^4 M_4 \tag{0.20}$$

Nem amiatt jobb, mint a trapéz szabály, hogy 12 helyett 180 osztja az intervallumot, hiszen $M_2$ és $M_4$ arányáról mitsem tudunk. A lényeg, hogy $h^2$ helyett $h^4$ hatvány szerint csökkenthető a hiba a beosztás finomításával.
*Példa*: Tudjuk, hogy

$$\int_0^1 5x^4\ dx = 1$$

amit közelítsünk most $n = 4$ pontos Simpson formulával. Tehát

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 0 | 1/4 | 2/4 | 3/4 | 4/4 |
| $y_k$ | 0 | $1 \cdot \frac{5}{256}$ | $16 \cdot \frac{5}{256}$ | $81 \cdot \frac{5}{256}$ | $256 \cdot \frac{5}{256}$ |

és

$$S = \frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{5}{256}\left\{0 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 16 + 4 \cdot 81 + 256\right\} = \frac{385}{384} = 1.00260....$$

Mivel $f^{(4)} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ állandó, a hibabecslés

$$E_S \leq \frac{1}{180}\left(\frac{1}{4}\right)^2 120 = \frac{1}{384}$$

ami 'véletlenül' megint akkora, mint a ténylegesen elkövetett hiba, csak azért, mert ilyen speciális függvényt integráltunk.

## h) Görbék átal határolt terület

Számítsuk ki a felülről $y = f(x)$, alulról az $y = g(x)$, jobbról $x = a$ és balról pedig az $x = b$ görbék által határolt területet Beosztást véve, az $x$-tengelyen téglalapokat rajzolhatunk

$$A_k = \left\{f(c_k) - g(c_k)\right\} \cdot \Delta x_k$$

területekkel. Ezek összege

$$\sum_{k=1}^{n} \{f(c_k) - g(c_k)\} \cdot \Delta x_k$$

egy Riemann összeg. A beosztás finomításával ez egy határozott integrál, azaz a keresett terület

$$A = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \{f(c_k) - g(c_k)\} \cdot \Delta x_k = \int_a^b \{f(t) - g(t)\}\, dt \tag{0.21}$$

*Példa*: Kiszámítjuk a $cos(x)$ és a $-sin(x)$ görbék által a $[0, \pi/2]$ intervallumon közbezárt idom területét:

$$A = \int_0^{\pi/2} \{cos(t) + sin(t)\}\, dt = [sin(t) - cos(t)]_0^{\pi/2} = 2$$

Hasonlóan járunk el, ha a görbék $x = F(y)$ és $x = G(y)$ alakúak és az $y = c$ és az $y = d$ egyenesek közötti tartomány területe szükséges:

$$A = \int_c^d \{F(t) - G(t)\}\, dt \tag{0.22}$$

Ha a keresett síkidom ezeknél általánosabb alakú, akkor feldarabolhatjuk a koordináta tengelyekkel párhuzamos vonalakkal olyan részekre, hogy azokra az előbbi formulák már alkalmazhatók legyenek.

## i) Síkgörbék ívhossza

Tekintsük egy $y = y(x)$ vagy $x = x(y)$ görbét a síkon. Vegyünk egy beosztást és az összetratozó $(x_k, y_k)$ és $(x_{k+1}, y_{k+1})$ pontokat kössük össze egyenessel. Az így kapott poligon a síkgörbét annál jobban közelíti, minél finomabb a beosztás. Egy elemi szakasz hossza

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

a teljes poligon hossza pedig

$$L \approx \sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \cdot \Delta x_k$$

A beosztás finomításával tehát azt várjuk, hogy ez az összeg (legalábbis jól viselkedő görbék esetén) a görbe hosszához tart. De hogyan lehetne ezt formálisan kiszámolni?
*Definíció:* Ha $y(x)$ folytonosan differenciálható, akkor **sima** görbének nevezzük.
Sima görbére van olyan $\{c_k, y(c_k)\}$ pont $x_k \leq c_k \leq x_{k+1}$, ahol a görbe érintője párhuzamos a szelővel

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = y'(c_k)$$

(a Lagrange-féle középértéktétel szerint). Így tehát

$$L \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (y'(c_k))^2} \cdot \Delta x_k$$

ami láthatóan egy Riemann összeg. Mivel feltevésünk szerint $y'(x)$ folytonos, így $\sqrt{1 + (y'(x))^2}$ is az. Ekkor viszont biztosan létezik a Riemann összeg határértéke és

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (y'(c_k))^2} \cdot \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

*Definíció:* Az $[a, b]$ intervallumon **sima** $y(x)$ görbe hossza

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \tag{0.23}$$

Ha így nehéz lenne kiszámolni, akkor tekinthetjük az $x = x(y)$ görbét is a megfelelő $y = c$ és $y = d$ határok között. Az előzőekhez hasonlóan ekkor

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \tag{0.24}$$

*Példa*: Kiszámítjuk a negyedkörív hosszát. Az $R$ sugarú, origó középpontú kör egyenlete $x^2 + y^2 = R^2$. A negyedkörív hosszához az iménti formulában a $[0, R]$ tartományon kell integrálnunk, akár az $x(y) = \sqrt{R^2 - y^2}$, akár az $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ explicit képletet használjuk. Legyen az előbbi, ekkor

$$x'(y) = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - y^2}} \quad \text{és} \quad \sqrt{1 + (x')^2} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{R^2 - y^2}} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - y^2}}$$

amivel

$$L = R \int_0^R \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2}} d\frac{y}{R} = R \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du = R \left[arc\ sin(u)\right]_0^1 = \frac{R\pi}{2}$$

## j) Impropius integrálok

Eddig a Riemann integrált csak **véges** $[a, b]$ intervallumokra definiáltuk és ott is csak olyan függvényekre, melyek az intervallumon korlátosak. Most kiterjesztjük a határozott integrál fogalomát végtelen intervallumokra, és a függvények szingularitási helyeire is.
*Defnció:* Ha az alábbi határértékek léteznek és:

- $f(x)$ integrálható az $[a, b]$ intervallumon tetszőleges $b > a$-ra, akkor

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx \tag{0.25}$$

- $f(x)$ integrálható az $[a, b]$ intervallumon tetszőleges $a < b$-re, akkor

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx \tag{0.26}$$

- $f(x)$ integrálható az $[c, b]$ intervallumon tetszőleges $a < c < b$-re, akkor

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a+0} \int_c^b f(x)dx \tag{0.27}$$

- $f(x)$ integrálható az $[a, c]$ intervallumon tetszőleges $a < c < b$-re, akkor

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)dx \tag{0.28}$$

Ha az előbbi hárérték léteznek, akkor azt mondjuk, hogy az **impropius integrál konvergál** és értéke a határérték. Ha a határérték nem létezik, akkor az impropius integrált **divergens**ek mondjuk. A divergens integrálok két típusát különböztetjük meg. Előfordul, hogy a határérték tágabb értelemben létezik, de nem véges. Ilyenkor gyakran írjuk például, hogy

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \infty$$

A másik eset, ha a határérték nem létezik. Akkor azt mondjuk, hogy az impropius integrál nem létezik.
*Példa:* $ln(x)/x^2$ integrálja $[1,\infty)$ intervallumon:

$$\int_1^b ln(x)/x^2 dx = \left[ln(x)\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^b - \int_1^b \left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x}\right)dx = -\frac{ln(b)}{b} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^b = -\frac{ln(b)}{b} - \frac{1}{b} + 1$$

és

$$\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{ln(b)}{b} - \frac{1}{b} + 1\right] = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{ln(b)}{b}\right] + 1 = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1/b}{1}\right] + 1 = 1$$

*Példa:* $1/\sqrt{x}$ integrálja $(0,1]$ intervallumon:

$$\int_c^1 1/\sqrt{x}dx = \left[2\sqrt{x}\right]_c^1 = 2(1-\sqrt{c})$$

és

$$\lim_{c\to 0+0} 2(1-\sqrt{c}) = 2$$

*Példa:* Az alábbi integrál divergens, a határéték végtelen

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\ dx = \lim_{c\to 1-0}\int_0^c \frac{1}{1-x}\ dx = \lim_{c\to 1-0}\ \left[-ln\left|1-x\right|\right]_0^c = \lim_{c\to 1-0}\left[-ln\left(1-c\right)+0\right] = \infty$$

*Példa:* Az alábbi integrál divergens, a határéték nem létezik

$$\int_0^\infty cos(x)\ dx = \lim_{b\to\infty}\ \left[sin(x)\right]_0^b = \text{ nem létezik, } [-1,1] \text{ minden pontja torlódási pont}$$

*Definció:* Ha az integrandus végtelenné válik az $[a,b]$ egy belső $d$ pontjában, akkor

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx \tag{0.29}$$

az integrál konvergens, ha mindkét impropius integrál konvergens, egyébként divergens
*Példa:*

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} &= \lim_{c\to 1-0}\int_0^c \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \lim_{c\to 1+0}\int_c^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} \\ &= \lim_{c\to 1-0}\left[3\left(c-1\right)^{1/3} - 3(0-1)^{1/3}\right] + \lim_{c\to 1+0}\left[3\left(3-1\right)^{1/3} - 3(b-1)^{1/3}\right] = 3 + 3\cdot 2^{1/3}\end{aligned}$$

*Definció:* Ha tetszőleges $a\in\mathbb{R}$ mellet az $\int_a^\infty f(x)\ dx$ és $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ létezik, akkor

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx \tag{0.30}$$

*Példa:* Ahol a limesz külön jelölését elhagyjuk

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = 2\left[tan^{-1}(x)\right]_0^\infty = 2\left[\frac{\pi}{2} - 0\right]_0^\infty = \pi$$

*Kritériumok konvergencia|divergencia eldönhetőségére (például)*

- Ha $f(x)$ és $g(x)$ folytonos az $[a,\infty)$ intervallumon és $0\le f(x)\le g(x)$ ebben a tartományban, akkor $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergens, ha $\int_a^\infty g(x)dx$ az.
- Ha $f(x)$ és $g(x)$ folytonos az $[a,\infty)$ intervallumon és $0\le f(x)$ és $0\le g(x)$ ebben a tartományban, és

$$lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} < \infty \tag{0.31}$$

  akkor $\int_a^\infty f(x)dx$ és $\int_a^\infty g(x)dx$ vagy mindkettő konvergens, vagy mindkettő divergens.

*Példa*: $e^{-x^2}$ -nek nincs elemi primitív függvénye, így nem tudjuk az impropius integrált direkt módon kiszámolni, de

$$\int_1^\infty e^{-x^2}dx \leq \int_1^\infty e^{-x}dx = \int_1^\infty e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_1^\infty = \frac{1}{e}$$

*Példa*: $f(x) = 1/x^2$ és $g(x) = 1/(1+x^2)$ az $[1, \infty)$ intervallumon

$$lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{x^2} = 1$$

tehát egyszerre divergensek|konvergensek. És valóban mindkettő konvergens, ugyanis

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 1 \quad \text{és} \quad \int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$$

## k) Vegyes megjegyzések az integrálok elméletéből

- Ha a függvény az $[a, b]$ intervallumon korlátos és **folytonos** $(a, b)$-n, akkor integrálható $[a, b]$-n.
- Ha a függvény az $[a, b]$ intervallumon korlátos és **monoton** $(a, b)$-n, akkor integrálható $[a, b]$-n.
- Ha a függvény az $[a, b]$ intervallumon integrálható, akkor a függvény értékének véges sok pontban való megváltoztatása az integrálhatóságon és az integrál értékén nem változtat.
- Ha a függvény az $[a, b]$ intervallum integrálható, akkor az abszolút értéke is integrálható (!fordítva nem következik!). Igaz továbbá, hogy

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \tag{0.32}$$

- Ahhoz, hogy $\int_a^\infty f(x)dx$ létezzen nem szükséges, hogy a függvény a végtelenben nullához tartson (elég, ha 'gyorsan oszcillál')
- Ha $\int_a^\infty f(x)dx$ létezik, akkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $T$ küszöbszám, hogy

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon \text{ , ha } \ a > T \text{ és } b > T \tag{0.33}$$

# Gyakorló feladatok

**1)** Mutassuk, meg, hogy ha $f(x)$ folytonos az $[a,b]$-n és $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, akkor $f(x) = 0$ legalább egyszer az $[a,b]$-n.
*Válasz:* (Középértététel)

**2)** Mutassuk, meg, hogy $0 \leq \int_0^\pi \sqrt{1+cos(x)}\,dx \ \leq \sqrt{2}$
*Válasz:* (Min-Max tétel)

**3)** Használjuk, hogy $cos(x) \geq 1 - x^2/2$ amivel adjunk alsó korlátot $\int_0^1 cos(x)\,dx$ értékére.
*Válasz:* $(I \geq 5/6)$

**4)** Adjuk meg a következő kezdeti-érték probléma megoldását határozott integrállal: $\left\{\frac{dy}{dx} = tan(x)\ ,\ y(1) = 5\right\}$.
*Válasz:* $\big(F(x) = \int_1^x tan(x)\,dx$ egy antiderivált, $y(x) = F(x) + C$, $5 = 0 + C\big)$

**5)** Adjuk meg a következő kezdeti-érték probléma megoldását határozott integrállal: $\left\{\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+x^2}\ ,\ y(1) = -2\right\}$.
*Válasz:* $\big(F(x) = \int_1^x \sqrt{1+x^2}\,dx$ egy antiderivált, $y(x) = F(x) + C,\ -2 = 0 + C\big)$

**6)** Számítsuk ki a Newton-Leibnitz formula segítségével: $\int_0^\pi cos(x)\ dx = 0$ , $\int_0^\pi cos^2(x)\ dx = \frac{\pi}{2}$ és $\int_1^4 \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{4}{x^2}\right)\,dx = 4$

**7)** Adjuk meg az $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ függvény grafikonja és az $x$-tengely által határolt terület nagyságát a $-1 \leq x \leq 2$ tartományra. Vigyázat, a függvény előjelet vált a jelzett intervallumon!
*Válasz:* $(T = 5/12 + |-8/3| = 37/12)$

**8)** Mennyi az $y(x) = x$ vezérgörbéjű forgástest (kúp) térfogata $x \in [0,4]$.
*Válasz:* $\left(V = \int_0^4 \pi x^2\,dx = \pi\frac{4^3}{3} = \frac{1}{3}\cdot 4^2\pi\cdot 4\right)$

**9)** Számítsuk ki az $R$ sugarú kör területét és az $R$ sugarú gömb térfogatát!
*Válasz:* $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$
\begin{aligned}
T = 4\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx &= \left(R\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}\quad u = \frac{x}{R}\quad du = \frac{dx}{R}\quad x = \left\{\begin{matrix} R \\ 0 \end{matrix}\right\} \to u = \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right\}\right) \\
&= 4R^2\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du = \left(0 \leq u \leq 1\quad u = sin(t)\quad du = cos(t)dt\quad u = \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right\} \to t = \left\{\begin{matrix} \pi/2 \\ 0 \end{matrix}\right\}\right) \\
&= 4R^2\int_0^{\pi/2} cos^2(t)dt = R^2\pi \\
V = 2\int_0^R \pi\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2\,dx &= 2\pi\left(R^2\cdot R - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}R^3\pi
\end{aligned}
$$

**10)** Kétszer parciálisan integrálva számítsuk $\int_2^3 x\cdot e^{2x}\,dx$ értékét!
*Válasz:*

$$
\begin{aligned}
\int_2^3 x^2\cdot e^{2x}\,dx &= x^2\cdot\frac{e^{2x}}{2}\bigg|_2^3 - \int_2^3 x\cdot e^{2x}\,dx = x^2\cdot\frac{e^{2x}}{2}\bigg|_2^3 - x\cdot\frac{e^{2x}}{2}\bigg|_2^3 + \frac{1}{2}\int_2^3 e^{2x}\,dx \\
&= x^2\cdot\frac{e^{2x}}{2}\bigg|_2^3 - x\cdot\frac{e^{2x}}{2}\bigg|_2^3 + \frac{1}{2}\,\frac{e^{2x}}{2}\bigg|_2^3 = (x^2 - x + \frac{1}{2})\cdot\frac{e^{2x}}{2}\bigg|_2^3 = 13/4\cdot e^6 - 5/4\cdot e^4
\end{aligned}
$$

**11)** Mekkora beosztást kell vennünk, hogy az $ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ értéket numerikus integrálással trapéz, illetve Simpson módszerrel $10^{-4}$ hibánál jobban megkapjuk?
*Válasz:* $\left(\frac{1}{x}\right)^{(2)} = \frac{2}{x^3}\quad max_{[1,2]}\left|\frac{2}{x^3}\right| = 2\quad E_S \leq \frac{2-1}{12}\cdot h^2\cdot 2 = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}\right)^2\quad 10^{-4} \leq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}\right)^2\quad n \geq \frac{100}{\sqrt{6}} \approx 41$

# Házi feladatok

**1)** Rajzoljuk fel az $f(x) = |x| - 1$ függvényt az alábbi intervallumokon. Adjuk meg mindegyik esteben az intarvallumra vett átlagot és azt a helyet, ahol a függvény felveszi átlagértékét. **a)** $[-1, 1]$ **b)** $[1, 3]$ **c)** $[-1, 3]$

**2)** A Min-Max egyenlőtlenséggel adjunk alsó és felső korlátot az $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$ határozott integrálra. Hasonlóan adjunk korlátot az $\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^2}\, dx$ és az $\int_{1/2}^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$ integrálokra, figyeljük meg, hogy az utóbbi két szám összege az első integrálnak egy finomított korlátja.

**3)** Számítsuk ki a Newton-Leibnitz formula segítségével:

- $\int_0^{32} x^{-6/5}\, dx$
- $\int_0^{\pi} sin(x)\, dx$
- $\int_{\pi/2}^{0} \frac{1+cos(2x)}{2}\, dx$ ($u = 2x$ helyettesítéssel)
- $\int_1^2 (3x+4)^3\, dx$ ($u = 3x + 4$ helyettesítéssel)
- $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x \cdot sin(x)\, dx$ (parciálisan)

**4)** Integrálással számítsuk ki, hogy mekkora a térfogata egy egyenes kúpnak. Az alapkör sugara $r$ és $h$ a kúp magassága.

**5)** Határozzuk meg $ln(5)$ közelítő értékét az $ln(5) = \int_1^5 1/x\ \ dx$ numerikus integrálásával. Legyen a beosztás részintervallumainak hossza $h = 1$.

- A becslést végezzük el Riemann összeg számolásával két módon is. Az intervallumokból előbb a baloldali ($c_k = x_{k-1}$), majd a jobboldali ($c_k = x_k$) határpontokat válasszuk.
- Számítsuk ki az inetgrált a trapéz szabály segítségével. Számítsuk ki a hibát!
- Alkalmazzuk a Simpson-szabályt is, a hibát ismét adjuk meg!