Matematikai 2. dolgozat

Többváltozós függvények differenciálása és integrálása

SZTE, Elméleti Fizikai Tanszék, 2003. április 30.

F. 1 *Az* $f(x,y) = x \cdot sin(x) + cos(x+y)$ *függvénynek a* $(0,0)$ *helyen kritikus pontja van. Írjuk fel a függvény másodrendű parciális deriváltjait és segítségükkel mutassuk meg, hogy a kritikus pont nyeregpont!*

F. 2 *Határozzuk meg az* $f(x,y) = x^2 + y^2$ *függvény integrálját a* $(0,0), (1,0)$ *és* $(0,1)$ *csúcsokkal adott háromszög alakú tartományon!*
$[Válasz: \ 1/3]$

F. 3 *A 3D tartományt felülről a* $z = \sqrt{\rho}$ *felület, alulról a* $z = 0$ *sík és oldalán a* $\rho = 4$ *hengerpalást határolja, ahol* $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

- Hengerkoordinátákban az erre a tartományra vonatkozó hármas integrálás felírható, mint

$$\iiint_V f \ dV = \int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{\rho}} f(\rho, \varphi, z) \ \rho \ dz \ d\rho \ d\varphi$$

  Fordítsuk meg a (z, ρ) integrálás sorrendjét!

- Hol van az alakzat súlypontja?
  $[Válasz: \ (X,Y,Z) = (0,0,5/6)]$

F. 4 *Mekkora a tömege az origó körüli* R *sugarú gömbnek, ha sűrűsége ebben a tartományban*

$$\sigma(x,y,z) = \alpha \cdot \left(x^2+y^2+z^2\right) = \alpha \cdot r^2$$

ahol α *állandó? Használjunk gömbi koordinátákat!*
$\left[Válasz: \ M = 4\pi\alpha R^5/5\right]$

F. 5 *A síkbelli Green-formulák alkalmazásával határozzuk meg az* $\mathbf{F} = xy \cdot \mathbf{i} + y^2 \cdot \mathbf{j}$ *vektormező fluxusát és cirkulációját az* $y = x^2$ *parabolából és az* $y = x$ *egyenesből kirajzolódó zárt görbére.*
$[Válasz: \ \Phi = 1/5 \ , \ R = -1/12]$

- Konzervatív-e ez a mező?
  $[Válasz: \ Nem]$

- Mennyi munkát végzünk a görbe $(0,0) \to (1,1)$ szakaszán az $y = x^2$ görbén haladva? És ha az $y = x$ mentén mennénk?
  $[Válasz: \ W_1 = 7/12 \ , \ W_2 = 8/12]$

F. 6 *Az* $\mathbf{F} = 2x \cdot \mathbf{i} + 2y \cdot \mathbf{j} + 2z \cdot \mathbf{k}$ *vektormező konzervatív. Igazoljuk, hogy* $rot(\mathbf{F}) = 0$ *valóban teljesül!*

- Mi a mező potenciálja?

- Mi az $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ munka-integrál értéke, ha a C görbe a $(0,0,0)$ pontban kezdődik és az $(1,1,1)$ pontban van a másik vége? A potenciál használata nélkül is számoljuk ki az integrált a

$$C \ : \ \mathbf{r}(t) = t \cdot \mathbf{i} + t \cdot \mathbf{j} + t \cdot \mathbf{k} \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

  görbe mentén!
  $[Válasz: \ W = 3]$

F. 7 *Igazoljuk, hogy az*

$$\mathbf{F} = \frac{x}{x^2+y^2} \cdot \mathbf{i} + \frac{y}{x^2+y^2} \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}$$

vektormezőnek a z-tengelyen kívül nem lehetnek forrásai!
$[Válasz: \ div(\mathbf{F}) = 0, \ ha \ (x,y,z) \neq (0,0,z)]$

- Igazoljuk továbbá, hogy $f(x,y,z) = \frac{1}{2} ln\left(x^2+y^2\right)$ a mezőnek egy potenciálja!

F. 8 *Mutassuk meg az* $f(x,y,z)$ *sima függvényre, hogy*

$$div(grad(f)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f = \Delta f \qquad és \qquad rot(grad(f)) = 0$$