Súrlódó folyadék stacionárius áramlása kétdimenzióban
Koonin: *Computational Physics*[*] könyve alapján

Bartha Ferenc

e-mail: barthaf@physx.u-szeged.hu, http : www.jate.u-szeged.hu/˜barthaf/
Szegedi Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék
(May 9, 2002)

I. A HIDRODINAMIKAI ALAPEGYENLETEK

Az áramló folyadékok jellemzésére a folyadék $\rho(\mathbf{r},t)$ sűrűségét és a $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$ sebességmezőt használjuk. Az ezekre vonatkozó kontinuitási egyenlet

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + div\ \rho\mathbf{V} = 0 \tag{1}$$

a tömeg megmaradását fejezi ki: a tér minden pontja körül a sűrűség az oda befolyó, illetve az onnan kifolyó anyagmennyiség miatt változik meg. A súrlódó folyadékok áramlását leíró másik egyenlet (Navier-Stokes)

$$\rho\left\{\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot grad)\mathbf{V}\right\} = \mathbf{f} - grad\ p\ +\ \eta\cdot\Delta\mathbf{V} +\ (\eta+\eta')\ grad\ div\ \mathbf{V} \tag{2}$$

lényegében az impulzus megmaradását jelenti. Az egyenletben a $p(\mathbf{r},t,T)$ nyomás gradiense szerepel. Ha a hőmérséklet változik, akkor a nyomást meghatározó állapotegyenletet is fel kellene írnunk. Most erre nem lesz szükségünk.

II. INKOMPRESSZIBILIS STACIONÁIUS ÁRAMLÁS KÉT DIMENZIÓBAN

Meg kívánjuk határozni, hogy viszkózus folyadék hogyan áramlik az útjába helyezett akadály mellett.

- Satcionárius áramlásra szorítkozunk, így az iménti egyenletekben minden idő szerinti derivált nulla.
- A folyadékot összenyomhatatlannak tekintjük, azaz a sűrűség a térben állandó.
- A z-koordinátában a problémát transzlációra invariánsan fogalmazzuk meg, úgy, hogy elegendő legyen az (x,y) síkmetszetben megoldani az egyenleteket.
- A folyadék hőmérsékletét térben és időben állandónak tekintjük, ezáltal a nyomás pusztán a megadott egyenletekből meghatározható.

Ilyen feltételek mellett a kontinuitási egyenletből

$$div\ \mathbf{V}(x,y) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

míg a másikból

$$\left(V_x\frac{\partial}{\partial x} + V_y\frac{\partial}{\partial y}\right)V_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)V_x \ \text{ és } \ \left(V_x\frac{\partial}{\partial x} + V_y\frac{\partial}{\partial y}\right)V_y = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)V_y \tag{4}$$

ahol bevezettük a $\nu = \eta/\rho$ *kinematikai viszkozitás*t. A három egyenlet a peremfeltételek tisztázása után ebben a fomájában megoldható a keresett $V_x(x,y)$, $V_y(x,y)$ és $p(x,y)$ függvényekre.

Mégis szokás egyéb 'segédfüggvényeket bevezetni'. Ilyen a $\Psi(x,y)$ *áramlási függvény*

---

[*] The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1986

$$V_x = \frac{\partial}{\partial y}\Psi(x,y) \quad \text{és} \quad V_y = -\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,y) \tag{5}$$

melynek létezése biztosított az adott differenciálegyenlet mellett. Szemléletes jelentése van, ugyanis szintvonalai az áramfonalakat adják, másképp mondva a sebesség mindenhol érinti a szintvonalakat: $\mathbf{V}\cdot grad\ \Psi(x,y) = 0$. A másik függvény a $\chi(x,y)$ *örvényesség*

$$\chi(x,y) = \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} = -\left(rot\ \mathbf{V}\right)_z \tag{6}$$

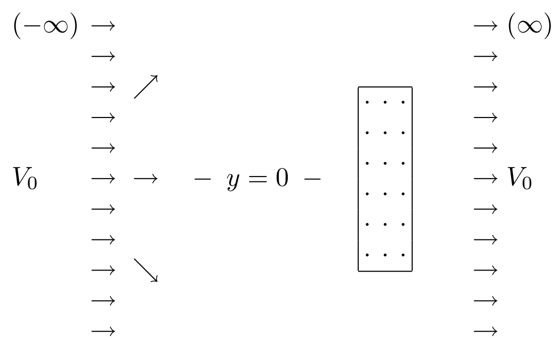
Az ezekre érvényes egyenletek

$$\Delta\Psi = \chi \quad ; \quad \Delta\chi = \nu\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial y}\right) \quad ; \quad \Delta p = 2\rho\left(\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\right)^2\right) \tag{7}$$

Örömünkre szolgál, hogy az egyenletek részben szétcsatolódtak. Meg kell előbb oldanunk az első két csatolt egyeneletet, majd az így kapott Ψ ismeretében a (ha egyáltalán érdekel bennünket a nyomás) a harmadikat.

III. A KONKRÉT PEREMÉRTÉKPROBLÉMA

Balról folyadék áramlik szabadon a tartományba $\mathbf{V}\,(x = -\infty, y) = [V_0, 0]$. A középen elhelyezett merev akadályt megkerülve a jobboldalon $\mathbf{V}\,(x = \infty, y) = [V_0, 0]$ sebességeloszlással távozik.



(8)

Az áramlási kép szimmetrikus lesz a felező ($y = 0$) egyenesre: $V_x(x,y) = V_x(x,-y)$ és $V_y(x,y) = -V_y(x,-y)$ következésképpen

$$V_y(x,0) = 0 \quad \text{és} \quad \left.\frac{\partial}{\partial y}V_x(x,y)\right|_{y=0} = 0 \tag{9}$$

Az előbbiből

$$V_y(x,0) = -\left.\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,y)\right|_{y=0} = 0 \implies \Psi(x,0) = \text{konstans} \quad (\text{speciálisan legyen } \Psi(x,0) = 0) \tag{10}$$

A konstanst megválaszthatjuk így, hiszen az áramlási függvénynek csak a deriváltjai érdekesek, bevezetése egy állandó erejéig határozatlanná teszi. Az akadályra merőlegesen folyadék nem folyhat, tehát az áramló folyadék sebessége párhuzamos az akadály oldalaival. Az akadályt így egyetlen áramvonal veszi körbe, ami egyúttal szintvonala az áramlási függvénynek. Ebből következik, hogy $\Psi = 0$ az akadály mentén. A szimmetria másik következménye, hogy

$$\chi(x,0) = \left.\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x}\right|_{y=0} = 0 \tag{11}$$

a tengelyen.

A χ-re vonatkozó további határfeltételek vizsgálatára vegyük figyelembe, hogy Ψ állandó az akadály falai mentén. Így

$$\Delta\Psi = \chi \quad \Longrightarrow \text{ a falaknál } \begin{cases} \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = \chi & \text{ha a fal} \mid\mid x \\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \chi & \text{ha a fal} \mid\mid y \end{cases} \tag{12}$$

Súrlódó folyadék esetén indokolt lenne azt előírni, hogy a folyadék tapad a falhoz, azaz a tangenciális áramlás sebessége nulla. Ezt azonban nem tehetjük meg az áramlási függvénnyel, ugyanis ekkor az elliptikus peremértékprobléma túlhatározottá válna. A tapadást tehát nem írjuk elő közvetlenül Ψ-re, de közvetve majd felhasználjuk, amikor az előbbi egyenleteket diszkretizáljuk a χ-re vonatkozó határfeltételhez.
A balról be és jobbra kifolyó örvénymentes áramlás miatt ezeken a határokon

$$\mathbf{V}(x = \pm\infty, y) = [V_0, 0] \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial\Psi}{\partial x} = 0 \ , \quad \frac{\partial\Psi}{\partial y} = V_0 \ \text{ és } \ \chi = 0 \ \text{ ha } \ |x| \to \infty \tag{13}$$

Végül a felső félteret zárt peremmel látjuk el, ha rendelkezünk arról, hogy az akadálytól y irányban messze milyen az áramlás. Kézenfekvő azt mondani, hogy elegendően nagy y távolságra az akadály hatása elenyésző, így a szabad áramlásra jellemző

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = 0 \ , \quad \frac{\partial\Psi}{\partial y} = V_0 \ \text{ és } \ \chi = 0 \ \text{ ha } \ |y| \to \infty \tag{14}$$

asszimptotikus alakok választhatók.

IV. DISZKRETIZÁLT EGYENLETEK

A számítást $x_i = (i-1)*h, \ i = 1,2,...,Nx$ és $y_j = (j-1)*h, \ j = 1,2,...,Ny$ gridpontokon végezzük el. Célszerű a hosszúság és a sebesség egységeit úgy választani, hogy $h = 1$ és $V_0 = 1$ legyen. Az áramlási függvényt hV_0, az örvényességet V_0/h a nyomást pedig ρV_0^2 egységekben fogjuk mérni.

A. Áramlási függvény

A diszkretizált differenciálegyenlet

$$\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j} + \Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1} - 4\Psi_{i,j} = \chi_{i,j} \tag{15}$$

A határfeltételek által közvetlenül nem érintett belső pontokban

$$\Psi_{i,j} = \frac{1}{4}\left[\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j} + \Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1} - \chi_{i,j}\right] \tag{16}$$

- Baloldalt ($x = 0$)

$$\left.\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \quad \to \quad \Psi_{2,j} - \Psi_{1,j} = 0 \tag{17}$$

  miatt

$$\Psi_{3,j} + \Psi_{1,j} + \Psi_{2,j+1} + \Psi_{2,j-1} - 4\Psi_{2,j} = \chi_{2,j} \quad \to \quad \Psi_{3,j} + \Psi_{2,j+1} + \Psi_{2,j-1} - 3\Psi_{2,j} = \chi_{2,j} \tag{18}$$

  azaz

$$\Psi_{2,j} = \frac{1}{3}\left[\Psi_{3,j} + \Psi_{2,j+1} + \Psi_{2,j-1} - \chi_{2,j}\right] \quad \textit{és} \ \ \Psi_{1,j} = \Psi_{2,j} \tag{19}$$

- Jobboldalt ($x = X$)

$$\left.\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|_{x=X} = 0 \quad \to \quad \Psi_{X,j} - \Psi_{X-1,j} = 0 \tag{20}$$

$$\Psi_{X-1,j} = \frac{1}{3}\left[\Psi_{X-2,j} + \Psi_{X-1,j+1} + \Psi_{X-1,j-1} - \chi_{X-1,j}\right] \quad \textit{és} \ \ \Psi_{X,j} = \Psi_{X-1,j} \tag{21}$$

- Felül ($y = Y$)

$$\left.\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right|_{y=Y} = V_0 \quad\to\quad \Psi_{i,Y} - \Psi_{i,Y-1} = hV_0 = 1 \tag{22}$$

$$\Psi_{i,Y-1} = \frac{1}{3}\left[\Psi_{i+1,Y-1} + \Psi_{i-1,Y-1} + \Psi_{i,Y-2} + 1 - \chi_{i,Y-1}\right] \;\; és \;\; \Psi_{i,Y} = \Psi_{i,Y-1} + 1 \tag{23}$$

- Felső sarkokban

$$\Psi_{2,Y-1} = \frac{1}{2}\left[\Psi_{3,Y-1} + \Psi_{2,Y-2} + 1 - \chi_{2,Y-1}\right] \tag{24}$$

$$\Psi_{1,Y-1} = \Psi_{2,Y-1} \quad \Psi_{2,Y} = \Psi_{2,Y-1} + 1 \quad \Psi_{1,Y} = \Psi_{2,Y} \tag{25}$$

és

$$\Psi_{X-1,Y-1} = \frac{1}{2}\left[\Psi_{X-2,Y-1} + \Psi_{X-1,Y-2} + 1 - \chi_{X-1,Y-1}\right] \tag{26}$$

$$\Psi_{X-1,Y} = \Psi_{X-1,Y-1} + 1 \quad \Psi_{X,Y-1} = \Psi_{X-1,Y-1} \quad \Psi_{X,Y} = \Psi_{X-1,Y} \tag{27}$$

B. Örvényesség

A diszkretizációval kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} (\chi_{i+1,j} - 2\chi_{i,j} + \chi_{i-1,j}) \\ \hookrightarrow \qquad + (\chi_{i,j+1} - 2\chi_{i,j} + \chi_{i,j-1}) \end{bmatrix} = \frac{R}{4}\begin{bmatrix} (\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1})(\chi_{i+1,j} - \chi_{i-1,j}) \\ \hookrightarrow \qquad - (\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j})(\chi_{i,j+1} - \chi_{i,j-1}) \end{bmatrix} \tag{28}$$

ahol $R = V_0 h/\nu$ a **rács Reynolds száma**.

- A határfeltétel a hátsó falnál legyen most az, hogy

$$\left.\frac{\partial\chi}{\partial x}\right|_{x=X} = 0 \quad\to\quad \chi_{X,j} - \chi_{X-1,j} = 0 \tag{29}$$

$$\begin{bmatrix} \left(\overset{\downarrow}{\chi}_{i,j} - 2\chi_{i,j} + \chi_{i-1,j}\right) \\ \hookrightarrow \qquad + (\chi_{i,j+1} - 2\chi_{i,j} + \chi_{i,j-1}) \end{bmatrix} = \frac{R}{4}\begin{bmatrix} (\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1})\left(\overset{\downarrow}{\chi}_{i,j} - \chi_{i-1,j}\right) \\ \hookrightarrow \qquad - (\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j})(\chi_{i,j+1} - \chi_{i,j-1}) \end{bmatrix} \quad i = X-1 \tag{30}$$

ahonnan

$$\left[3 + \frac{R}{4}(\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1})\right]\chi_{i,j} = \chi_{i-1,j} + \chi_{i,j+1} + \chi_{i,j-1} \tag{31}$$

$$+\frac{R}{4}(\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j})(\chi_{i,j+1} - \chi_{i,j-1}) + \frac{R}{4}(\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1})\chi_{i-1,j} \tag{32}$$

- Az akadály felső peremén

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = \chi \quad \text{miatt} \quad \Psi_{i,j+1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1} = \chi_{i,j} \tag{33}$$

lenne, de ebben $\Psi_{i-1,j}$, mint az akadály belsejében levő pont értelmetlen. Ha most a tapadást figyelembe vesszük, azaz használjuk, hogy

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y} \approx 0 \quad\Longrightarrow\quad \Psi_{i,j+1} \approx \Psi_{i,j-1} \tag{34}$$

akkor kapjuk, hogy

$$\chi_{i,j} = 2(\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j}) \tag{35}$$

- Hasonlóan kapjuk az akadály bal és jobb oldalán, hogy

$$\chi_{i,j} = 2(\Psi_{i-1,j} - \Psi_{i,j}) \quad \text{illetve} \quad \chi_{i,j} = 2(\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i,j}) \tag{36}$$