I. CIRCULAR, CO-PLANAR, RESTRICTED THREE-BODY PROBLEM

Két gravitáló m_1 és m_2 objektum (égitest) tömegközéppontjuk körüli körpályán mozog. A mozgás síkját inerciarendszernek vesszük, ekkor

$$\frac{\gamma m_1 m_2}{(r_1+r_2)^2} = m_1 r_1 \omega^2 = m_2 r_2 \omega^2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \gamma m_1 = (r_1+r_2)^2 \, r_2 \omega^2 \\ \gamma m_2 = (r_1+r_2)^2 \, r_1 \omega^2 \end{cases} \tag{1}$$

Egy harmadik $\mu \ll m_1, m_2$ tömegű test visszahatását a hozzá képest nagy tömegű égitestekre elhanyagoljuk. A nagy tömegekkel együtt forgó koordináta rendszerben a kis tömegű test Lagrange függvénye

$$L(r,\varphi,\dot{r},\dot{\varphi},t) = \frac{\mu}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\varphi}+\omega\right)^2\right] - V(r,\varphi) \tag{2}$$

ahol a ponteciális energia

$$V(r,\varphi) = -\mu\left[\frac{\gamma m_1}{s_1} + \frac{\gamma m_2}{s_2}\right] = -\mu\omega^2\left(r_1+r_2\right)^2\left[\frac{r_2}{s_1} + \frac{r_1}{s_2}\right] \tag{3}$$

$$s_i = \sqrt{r_i^2 + r^2 - 2\, r_i\, r\, cos(\varphi-\varphi_i)} \quad \text{miközben} \qquad \varphi_1 = \pi \quad \text{és} \quad \varphi_2 = 0 \tag{4}$$

A kanonikus impulzusok

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu\dot{r} \quad \text{és} \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2\left(\dot{\varphi}+\omega\right) \tag{5}$$

A Hamilton függvény ezekkel

$$H(r,\varphi,p_r,p_\varphi,t) = p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} - L = \frac{1}{2\mu}\left[p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right] - p_\varphi\omega + V(r,\varphi) \tag{6}$$

és a kanonikus mozgásegyenletek

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{\mu} \tag{7}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{\mu r^2} - \omega \tag{8}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{\mu r^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \tag{9}$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} \tag{10}$$

A szükséges deriváltak

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \mu\omega^2\left(r_1+r_2\right)^2\left[\frac{r_2}{s_1^2}\frac{\partial s_1}{\partial r} + \frac{r_1}{s_2^2}\frac{\partial s_2}{\partial r}\right] = \mu\omega^2\left(r_1+r_2\right)^2\left[\frac{r_2}{s_1^3}\left(r + r_1 cos(\varphi)\right) + \frac{r_1}{s_2^3}\left(r - r_2 cos(\varphi)\right)\right] \tag{11}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \mu\omega^2\left(r_1+r_2\right)^2\left[\frac{r_2}{s_1^2}\frac{\partial s_1}{\partial \varphi} + \frac{r_1}{s_2^2}\frac{\partial s_2}{\partial \varphi}\right] = \mu\omega^2\left(r_1+r_2\right)^2\left[\frac{1}{s_2^3} - \frac{1}{s_1^3}\right] r_1 r_2 r sin(\varphi) \tag{12}$$

Az egyensúlyi helyzetekben

$$\dot{r} = 0 \quad \dot{\varphi} = 0 \quad \dot{p}_r = 0 \quad \dot{p}_\varphi = 0$$

A kanonikus impulzusokra az első két egyenletből kapjuk, hogy:

$$p_r = 0 \quad \text{és} \quad p_\varphi = \mu r^2 \omega \tag{13}$$

Az egyensúlyi helyzetek (r,φ) koordinátáit a másik két egyenletből számíthatjuk ki

$$\dot{p}_\varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r\left[\frac{1}{s_2^3} - \frac{1}{s_1^3}\right] sin(\varphi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} r = 0 \\ \varphi = 0, \pi \\ s_1 = s_2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Az $r = 0$ triviális megoldás nem érdekes. A $\varphi = 0, \pi$ megoldásoknál a három objektum egy egyenes mentén helyezkedik el. Az

$$\frac{p_\varphi^2}{\mu r^3} - \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \tag{15}$$

egyenletbe az egyensúly $p_\varphi = \mu r^2 \omega$ behelyettesítve

$$\mu r \omega^2 - \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \tag{16}$$

látjuk. Ez egy ötödfokú egyenlet az ismeretlen r koordinátára. Három valós megoldásából az L_1, L_2, L_3 Lagrange helyzeteket kapjuk meg, ahol az egyenes mentén a centrifugális erő egyensúlyt tart a két vonzócentrumtól származó erővel. Ezek a helyzetek instabilak. Két további egyensúlyi helyzetet kapunk $s_1 = s_2$ mellett, ekkor a három objektum egy egyenlő oldalú háromszög csúcsain helyezkedik el. Ezek az L_4, L_5 Lagrange konfigurációk stabil egyensúlyi helyzetek(megfelelő m_1/m_2 tömegarány mellett). Ezen pontok környezetében a rendszer (helyesebben most a kis tömegű test) kis (librációs) rezgéseket végez.

Technikai tanácsok:
A $r(t), \varphi(t), \dot{r}(t), \dot{\varphi}(t)$ független a μ tömegtől, célszerű a $\mu = 1$ választás a programozás során.
Válasszuk a hosszúság és az idő egységeket úgy, hogy $d = r1 + r2 = 1$ és $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$ legyen.
A tömegarány legyen $m_2/m_1 = 0.000953875$, ez a Nap($\tilde{}m_1$) és Jupiter($\tilde{}m_2$) párosra jellemző.

- Keressük meg numerikusan az L_1, L_2, L_3 Lagrange helyzeteket!
- Indítsuk a rendszert L_4, vagy L_5 környezetéből. A testnek a stabil egyensúlyi helyzet körül kell maradnia a numerikus megoldás során. Alkalmas kezdőfeltétellel indítva a kirajzolt pálya alakja emlékeztet egy ebihal (*tadpole*) alakjára.
- L_3 környezetéből indulva a test elcsatangol. Lópatkóra (*horseshoe*) emlékeztető periódikus pályákat kapunk alkalmas kezdőfeltétellel.