Három gravitációs kölcsöhatásban levő objektum speciális mozgásai (CCR3B)

Bartha Ferenc*
Szegedi Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék
készültség: April 24, 2003
(http://www.jate.u-szeged.hu/~barthaf/oktatas.htm)

1. CIRCULAR, CO-PLANAR, RESTRICTED THREE-BODY PROBLEM

Az m_1 és m_2 tömegű égitestek tömegközéppontjuk körül körmozgást végeznek. A mozgás síkját inerciarendszernek vesszük. Egy harmadik $m \ll m_1, m_2$ tömegű test visszahatását a hozzá képest nagy tömegű égitestekre elhanyagoljuk, vizsgáljuk eme test mozgását a nagy testekkel együtt forgó vonatkoztatási rendszerben.

A nagy testek helyzete a tömegközéppontban levő koordinátarendszerben

$$\mathbf{r}_1 = (-r_1, 0, 0) \quad \text{és} \quad \mathbf{r}_2 = (r_2, 0, 0) \tag{1.1}$$

A két test távolsága

$$d = r_1 + r_2 \tag{1.2}$$

ezekkel

$$-m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} d \quad , \quad r_1 = d - r_2 \tag{1.3}$$

A körpályán való mozgás feltétele

$$m_1 r_1 \omega^2 = \frac{\gamma m_1 m_2}{d^2} = m_2 r_2 \omega^2 \tag{1.4}$$

miatt

$$\gamma m_1 = r_2 \cdot d^2 \omega^2 \quad \text{és} \quad \gamma m_2 = r_1 \cdot d^2 \omega^2 \tag{1.5}$$

A potenciáltérben mozgó részecske Lagrange-függvénye

$$L = \frac{1}{2} m \left(\mathbf{v} + \omega \times \mathbf{r}\right)^2 - V(\mathbf{r}) \quad , \quad V(\mathbf{r}) = -m \left(\frac{\gamma m_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{\gamma m_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} \right) \tag{1.6}$$

$$= m \left[\frac{1}{2} \left(\mathbf{v} + \omega \times \mathbf{r}\right)^2 + d^2 \omega^2 \left(\frac{r_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{r_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} \right) \right] \tag{1.7}$$

A mozgásegyenlethez

$$dL = m \left(\mathbf{v} + \omega \times \mathbf{r}\right) \cdot \left(d\mathbf{v} + \omega \times d\mathbf{r}\right) - \nabla V(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \tag{1.8}$$

$$= m \left(\mathbf{v} + \omega \times \mathbf{r}\right) \cdot d\mathbf{v} + m(\mathbf{v} + \omega \times \mathbf{r}) \cdot (\omega \times d\mathbf{r}) - \nabla V(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \tag{1.9}$$

$$= m \left(\mathbf{v} + \omega \times \mathbf{r}\right) \cdot d\mathbf{v} + m(\mathbf{v} + \omega \times \mathbf{r}) \times \omega \cdot d\mathbf{r} - \nabla V(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \tag{1.10}$$

azaz

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} L = m \left(\mathbf{v} + \omega \times \mathbf{r}\right) \quad \text{és} \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} L = m(\mathbf{v} + \omega \times \mathbf{r}) \times \omega - \nabla V(\mathbf{r}) \tag{1.11}$$

ahonnan

$$m \left(\frac{d}{dt} \mathbf{v} + \omega \times \mathbf{v} \right) = m(\mathbf{v} + \omega \times \mathbf{r}) \times \omega - \nabla V(\mathbf{r}) \tag{1.12}$$

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = -\nabla V(\mathbf{r}) + 2m(\mathbf{v} \times \omega) + m \left(\omega \times \mathbf{r}\right) \times \omega \tag{1.13}$$

---

*Electronic address: `barthaf@physx.u-szeged.hu`

A konkrét esetben tehát

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -d^2\omega^2 \left(\frac{r_2\,(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3} + \frac{r_1\,(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^3} \right) + 2\mathbf{v}\times\omega + \omega\times(\mathbf{r}\times\omega) \tag{1.14}$$

2. SÍKMOZGÁS, LAGRANGE-FÉLE EGYENSÚLYI HELYZETEK

A centrifugális erőnek nincs a körmozgás síkjára merőleges komponense. A gravitációs vonzás a síkon kívüli objektumokra nem lehet nulla, a síkra merőleges irányban biztosan a síkba visszatérítő erő hat. Egyensúlyi helyzetekre tehát csak a körmozgás síkjában számíthatunk. Legyen ez az (x, y) sík, ekkor $\omega = (0, 0, \omega)$. A csak a síkban történő mozgások leírásához a mozgásegyenlet

$$\frac{dv_x}{dt} = -d^2\omega^2 \left(\frac{r_2\,(x+r_1)}{s_1^3} + \frac{r_1\,(x-r_2)}{s_2^3} \right) + 2\omega\cdot v_y + \omega^2\cdot x \tag{2.1}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -d^2\omega^2 \left(\frac{r_2}{s_1^3} + \frac{r_1}{s_2^3} \right)\cdot y - 2\omega\cdot v_x + \omega^2\cdot y \tag{2.2}$$

ahol

$$s_1 = \sqrt{(x+r_1)^2 + y^2} \quad \text{és} \quad s_2 = \sqrt{(x-r_2)^2 + y^2} \tag{2.3}$$

Egyensúlyi helyzetre

$$d^2 \left(\frac{r_2}{s_1^3} + \frac{r_1}{s_2^3} \right) = 1 \quad \text{és} \quad d^2 \left(\frac{r_2\,(x+r_1)}{s_1^3} + \frac{r_1\,(x-r_2)}{s_2^3} \right) = x \tag{2.4}$$

Összesen 5 ilyen egyensúlyi helyzet van, ezek a Lagrange-pontok. Megkeresésükhöz legyen az első egyeletben

$$s_1 = s_2 = s \tag{2.5}$$

akkor

$$s = d \tag{2.6}$$

és a második egyenlet is kielégül, hiszen

$$\frac{d^2}{s^3}\left(r_2\,(x+r_1) + r_1\,(x-r_2)\right) = x \tag{2.7}$$

$$r_2\,(x+r_1) + r_1\,(x-r_2) = dx \tag{2.8}$$

$$(r_2+r_1)\,x + r_2 r_1 - r_1 r_2 = dx \tag{2.9}$$

azonosság. Ekkor tehát a három test egy szabályos háromszög csúcsain helyezkedik el. Ezek az L4 és az L5 Lagrange-helyzetek.

Ha $y = 0$, akkor

$$s_1 = |x+r_1| \quad \text{és} \quad s_2 = |x-r_2| \tag{2.10}$$

amikkel a különböző lehetéges intervallumokon az

$$d^2 \left(\frac{r_2}{(x+r_1)^2} + \frac{r_1}{(x-r_2)^2} \right) = x \qquad r_2 < x \tag{2.11}$$

$$d^2 \left(\frac{r_2}{(x+r_1)^2} - \frac{r_1}{(x-r_2)^2} \right) = x \qquad -r_1 < x < r_2 \tag{2.12}$$

$$d^2 \left(\frac{r_2}{(x+r_1)^2} + \frac{r_1}{(x-r_2)^2} \right) = -x \qquad x < -r_1 \tag{2.13}$$

egyenletekből x numerikusan meghatározható. A gravitációs centrumokon átmenő egyenes mentén így kapjuk a további L1,L2 és L3 Lagrange-pontokat. Az egyenes mentén a centrifugális erő egyensúlyt tart a két vonzócentrumtól származó erővel.

3. STABILITÁS

A $z = 0$ sík stabil, hiszen a síkból kmozdított objektumra a síkba visszatérítő erő hat. A síkban a Lagrange-helyzetek satbilitásvizsgálatához előbb a

$$V_{eff} = -\left(\frac{x^2+y^2}{2} + \frac{r_2}{s_1} + \frac{r_1}{s_2}\right) \tag{3.1}$$

effektív potenciált vizsgáljuk meg ($d = \omega = m = 1$ egységekben). A függvényt kirajzolva láthatjuk, hogy a Lagrange-helyzetek vagy nyeregpontokban vannak, vagy éppenséggel a potenciál lokális maximumainál. Ez azt jelenti, hogy a nem mozgó objektum instabil egyensúlyi helyzetben van. Meg kell vizsgálni, hogy változik-e a szituáció, ha nemcsak kitérítjük a Lagrange-pontból részecskét, de engedjük mozogni is. Ekkor ugyanis lehetséges, hogy az effektív potenciál mellett megjelenő Coriolis-erő képes stabilizálni a mozgást. Az analízis azt mutatja, hogy az L1,L2 és L3 helyzetek körül nem tudja a Coriolis-erő megtartani a mozgó részecskét sem. Ami viszont igen érdekes, hogy a maradék két Lagrange-helyzet bizonyos feltételek mellett stabillá válik. Ezen pontok környezetében a rendszer (helyesebben most a kis tömegű test) kis (librációs) rezgéseket végez. Megmutatható, hogy a kis rezgések frekvenciájára

$$\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}\sqrt{27\left(\frac{r_1-r_2}{d}\right)^2 - 23} \tag{3.2}$$

ami akkor jelent valódi rezgést, azaz stabil helyzetet, ha a ν sajátfrekvencia valós. Ez megköveteli, hogy

$$\nu^2 \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \left[27\left(\frac{r_1-r_2}{d}\right)^2 - 23\right] > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{|r_1-r_2|}{d} > \sqrt{\frac{23}{27}} \tag{3.3}$$

legyen a komplex gyökök elkerülésének az érdekében. Látható, hogy ekkor

$$\left(\frac{r_1-r_2}{d}\right)^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}\sqrt{27\left(\frac{r_1-r_2}{d}\right)^2 - 23} < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \nu^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \nu \in \mathbb{R} \tag{3.4}$$

Figyelembe véve, hogy

$$r_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}d \quad , \quad r_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2}d \tag{3.5}$$

kapjuk a két Lagrange-helyzet körüli kis rezgések stabilitásának a feltételét:

$$\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} > \sqrt{\frac{23}{27}} = a \tag{3.6}$$

$$m_1\,(1-a) > (1+a)m_2 \tag{3.7}$$

$$0.04 = \frac{1-a}{1+a} > \frac{m_2}{m_1} \tag{3.8}$$

4. A SÍKMOZGÁS TÁRGYALÁSA ÁLTALÁNOS KOORDINÁTÁKBAN KANONIKUS FORMALIZMUSSAL

A kis tömegű test (tömeggel egyszerűsített) Lagrange-függvénye polárkoordinátákban:

$$L(r,\varphi,\dot{r},\dot{\varphi},t) = \frac{1}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\varphi}+\omega\right)^2\right] - V(r,\varphi) \tag{4.1}$$

ahol a ponteciális energia

$$V(r,\varphi) = -\omega^2 d^2\left[\frac{r_2}{s_1} + \frac{r_1}{s_2}\right] \quad s_i = \sqrt{r_i^2 + r^2 - 2\,r_i\,r\,cos(\varphi-\varphi_i)} \;\; , \quad \varphi_1 = \pi \quad \text{és} \quad \varphi_2 = 0 \tag{4.2}$$

A kanonikus impulzusok

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \dot{r} \quad \text{és} \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = r^2\left(\dot{\varphi}+\omega\right) \tag{4.3}$$

A Hamilton-függvény ezekkel

$$H(r,\varphi,p_r,p_\varphi,t) = p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} - L = \frac{1}{2}\left[p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right] - p_\varphi\omega + V(r,\varphi) \tag{4.4}$$

és a kanonikus mozgásegyenletek

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = p_r \tag{4.5}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{r^2} - \omega \tag{4.6}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{r^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \tag{4.7}$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} \tag{4.8}$$

A szükséges deriváltak

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \omega^2 d^2\left[\frac{r_2}{s_1^2}\frac{\partial s_1}{\partial r} + \frac{r_1}{s_2^2}\frac{\partial s_2}{\partial r}\right] = \omega^2 d^2\left[\frac{r_2}{s_1^3}\left(r + r_1 cos(\varphi)\right) + \frac{r_1}{s_2^3}\left(r - r_2 cos(\varphi)\right)\right] \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \omega^2 d^2\left[\frac{r_2}{s_1^2}\frac{\partial s_1}{\partial \varphi} + \frac{r_1}{s_2^2}\frac{\partial s_2}{\partial \varphi}\right] = \omega^2 d^2\left[\frac{1}{s_2^3} - \frac{1}{s_1^3}\right] r_1 r_2 r sin(\varphi) \tag{4.10}$$

5. TECHNIKAI TANÁCSOK

- Válasszuk a hosszúság és az idő egységeket úgy, hogy $d = r1 + r2 = 1$ és $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$ legyen.
- Az effektív potenciál ábrázolásához a tömegarány legyen $m_2/m_1 \approx 0.2$. A Lagrange-helyzetek körüli kvalitatív viselkedés más tömegaránynál is ilyen lenne, csak nem sokat lehetne látni belőle.
- A Lagrange-helyzetekkel kapcsolatos mozgások vizsgálatánál legyen $m_2/m_1 = 0.000953875$, ez a Nap($\tilde{}m_1$) és Jupiter($\tilde{}m_2$) párosra jellemző.
- További hasznos eset: $m_2/m_1 = 0.012$, ez a Föld($\tilde{}m_1$) és Hold ($\tilde{}m_2$) párosra jellemző.
- Keressük meg numerikusan az L_1, L_2, L_3 Lagrange helyzeteket!
- Indítsuk a rendszert L_4, vagy L_5 környezetéből. A testnek a stabil egyensúlyi helyzet körül kell maradnia a numerikus megoldás során. Alkalmas kezdőfeltétellel indítva a kirajzolt pálya alakja emlékeztet egy ebihal (*tadpole*) alakjára.
- L_3 környezetéből indulva a test elcsatangol. Lópatkóra (*horseshoe*) emlékeztető periódikus pályákat kapunk alkalmas kezdőfeltétellel. És kereshetünk további szemet gyönyörködtető zárt pályákat.
- A kirajzolt mozgások a gravitáló centrumokkal együtt forgó speciális vonatkoztatási rendszerben értendők. Érdemes átalakítani a programot úgy, hogy ezeket máshonnan "nézve" is kirajzoljuk.
- A projektben nemcsak a Lagrange-helyzetekkel kapcsolatos mozgásokat elemezhetjük, hanem például kirajzolhatjuk a Föld-Hold garvitációs térben egy űrhajó pályáját, vagy egyéb hasonlókat. Próbáljunk olyan pályát találni, amelyik a Földről indulva a Hold közvetlen közelébe jut, majd onnan visszatér a Föld közelébe pusztán a gravitációs mező segítségével. Az sem jelent elvi nehézséget, hogy módosítsuk a programot, a mozgást szakaszra bonthajuk és az egyes szakaszok között az aktuális sebességértékeket megváltoztatva imitáljuk a pályamódosítást, a hajtóművek rövid bekapcsolását.