Óravázlatok a Matematikai Módszerek a Fizikában 2. előadásokhoz
II.rész: Speciális függvények

Bartha Ferenc*
Szegedi Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék
készültség:February 11, 2003
(http://www.jate.u-szeged.hu/~barthaf/mm2.htm)

Contents

---

*Electronic address: `barthaf@physx.u-szeged.hu`

[0] Ajánlott irodalom:
P. Frank: A mechanika és fizika differenciál- és integrálegyenletei I-II., Bp. : Mûszaki K., 1966-
Simonyi Károly: Elméleti villamosságtan, Bp. : Mûszaki K., 2000
I. N. Bronstejn: Matematikai kézikönyv, Bp. : TypoTEX, 2000
G. B. Arfken: Mathematical methods for physicists,San Diego etc.: Academic P., 2001
M. Abramowitz: Handbook of mathematical functions, New York Dover Publ. Inc. 1972-

1. A LEGENDRE-FÉLE DIFFERENCIÁLEGYENLET

1.1. Bevezetés

Tipikus feladat a $\triangle\Psi + u(r)\Psi = 0$ differenciálegyenlet tárgyalása gömbi koordinátákban, ahol az egyenlet alakja:

$$\frac{1}{r^2 sin(\vartheta)}\left[sin(\vartheta)\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(sin(\vartheta)\frac{\partial\Psi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{sin(\vartheta)}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}\right]=-u(r)\Psi(r,\vartheta,\varphi) \tag{1.1}$$

Vizsgáljuk a $\Psi = R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$ alakú alapmegoldásokat. Behelyettesítve és elosztva Ψ-vel

$$\frac{1}{R}\frac{1}{r^2}\left(r^2R'\right)'+\frac{1}{\Theta}\frac{1}{r^2 sin(\vartheta)}\left(sin(\vartheta)\Theta'\right)'+\frac{1}{\Phi}\frac{1}{r^2 sin^2(\vartheta)}\Phi''=-u(r)$$

Előbb szorozzunk végig $r^2 sin^2(\vartheta)$-val, ezzel a φ-től függő részt leválasztottuk (szeparáltuk):

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)}\Phi''(\varphi)=f(r,\vartheta)$$

ahol a bal oldal csak φ-től, a jobboldal pedig csak (r,ϑ)-tól függ. Ez úgy lehetséges minden (r,ϑ,φ) értékre, ha mindkét oldal konstans. A szeparációs állandót $-m^2$ alakban vesszük fel, ekkor

$$\frac{1}{\Phi}\Phi''=-m^2 \quad\Rightarrow\quad \Phi(\varphi)=e^{im\varphi} \tag{1.2}$$

ahol a $\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$ határfeltétel miatt $m = 0, \pm1, \pm2, ...$ tetszőleges egész szám lehet.

A maradék egyenlet újra szeparálható

$$\frac{1}{R}\left(r^2R'\right)'+r^2u=\lambda \qquad \text{és} \qquad -\lambda=\frac{1}{\Theta}\frac{1}{sin(\vartheta)}\left(sin(\vartheta)\Theta'\right)'-\frac{m^2}{sin^2(\vartheta)} \tag{1.3}$$

Csak a szögfüggő résszel foglalkozunk (a radiális rész csak konkrét $u(r)$ mellett lenne érdekes). Vezessük be az $x = cos(\vartheta)$, $F(x) = \Theta(\vartheta)$ jelöléseket, ekkor $dx = -sin(\vartheta)d\vartheta$ miatt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{sin(\vartheta)}\frac{d}{d\vartheta}\left(sin(\vartheta)\frac{d}{d\vartheta}\Theta\right)=-\frac{d}{dx}\left(-sin^2(\vartheta)\frac{d}{dx}\Theta\right)=\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d}{dx}\Theta\right) \quad \text{és} \quad \frac{m^2}{sin^2(\vartheta)}=\frac{m^2}{1-x^2} \tag{1.4}$$

Ha még hozzátesszük, hogy bennünket most a $\lambda = n(n + 1)$ megoldások érdekelnek, akkor az **asszociált Legendre-egyenlet** alakja:

$$\left(\frac{m^2}{1-x^2}-n(n+1)\right)F=\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d}{dx}F\right) \tag{1.5}$$

1.2. Legendre-polinomok és függvények $(m = 0)$

Legyen speciálisan $m = 0$. Ekkor a Legendre-egyenlet:

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{d}{dx}F\right\}=-n(n+1)F \;\; \text{másként} \;\; L[F]=-n(n+1)F \tag{1.6}$$

Keressük a megoldást hatványsor alakjában

$$F(x)=x^s\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i \quad\Rightarrow\quad F'(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i(i+s)x^{i+s-1} \quad\Rightarrow\quad (1-x^2)F'(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i(i+s)\left(x^{i+s-1}-x^{i+s+1}\right)$$

azaz

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{d}{dx}F\right\}=\sum_{i=0}^{\infty}a_i(i+s)(i+s-1)x^{i+s-2}-\sum_{i=0}^{\infty}a_i(i+s)(i+s+1)x^{i+s}$$

Ezt beírva a (1.6) L-egyenletbe

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i(i+s)(i+s-1)x^{i+s-2} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left\{(i+s)(i+s+1) - n(n+1)\right\} x^{i+s}$$

majd kigyűjtve x^{i+s} együtthatóit, kapjuk, hogy

$$a_{i+2}(i+s+2)(i+s+1) = a_i \left\{(i+s)(i+s+1) - n(n+1)\right\} \tag{1.7}$$

Tekintsük az $i = -2$ esetet (figyelve, hogy $a_{-2} = 0$)

$$a_0 s(s-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad s = 0, 1$$

Az $s = 0$ esetben az $a_0 = 1$ és $a_1 = 0$ mellett a rekurziós formulánk:

$$a_{i+2} = \frac{i(i+1) - n(n+1)}{(i+2)(i+1)} a_i = -a_i \frac{(n-i)(n+i+1)}{(i+2)(i+1)}$$

míg $s = 1$ és $a_0 = 1$ és $a_1 = 0$ esetben

$$a_{i+2} = -a_i \frac{(n-i-1)(n+i+2)}{(i+2)(i+3)} \tag{1.8}$$

A két független megoldás tehát

$$\begin{aligned} F_0(x) &= 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 + ... \\ F_1(x) &= x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 + ... \end{aligned} \tag{1.9}$$

Ha $n = 2k$ páros egész szám, akkor $F_0(x)$ véges fokszámú polinom ($a_{n+2} = 0$), illetve, ha $n = 2k+1$ páratlan, akkor $F_1(x)$ lesz n-ed fokú polinom ($a_{n+2} = 0$). Ezek a $P_n(x)$ **Legendre-polinomok**.

A végtelen sorokat $Q_n(x)$ (másodfajú) **Legendre-függvénynek** hívjuk, a sorok konvergensek a $(-1, 1)$ intervallumon és divergensek $x = \pm 1$-ben. A Legendre-differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$F(x) = A \cdot P_n(x) + B \cdot Q_n(x) \tag{1.10}$$

1.3. Legendre-polinomok tulajdonságai

- Normálási konvenció:

$$P_n(1) = 1 \tag{1.11}$$

- Általános alak

$$P_n(x) = \sum_{0 \le 2i \le n} (-1)^i \frac{(2n-2i)!}{2^n i!(n-i)!(n-2i)!} x^{n-2i} \tag{1.12}$$

- Példák

$$\begin{array}{ll} P_0(x) = 1 & P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \end{array} \tag{1.13}$$

- Paritás (csupa páros vagy csupa páratlan hatványokból álló polinomok)

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \tag{1.14}$$

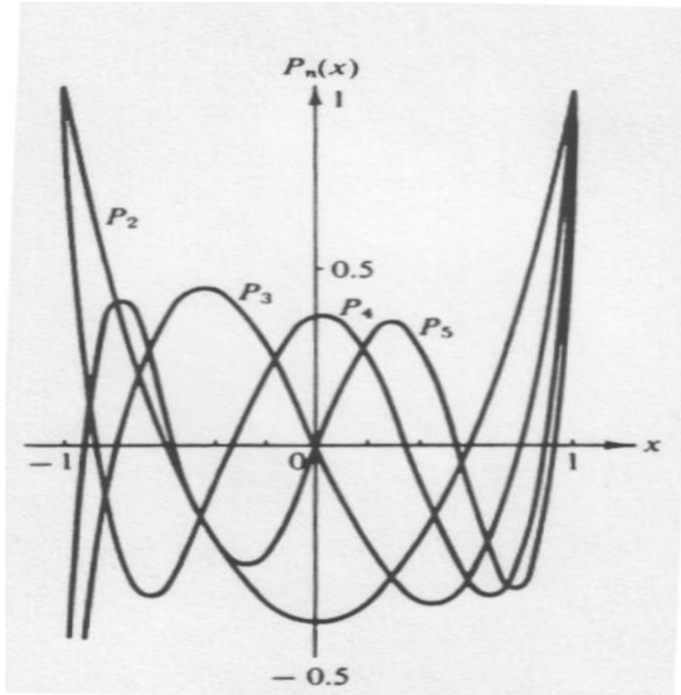


FIG. 1: Legendre-polinomok

- Speciális értékek 0-ban: Az általános alakban a $2i = n$ tagból

$$P_{2k}(0) = (-1)^{n/2} \frac{n!}{2^n \left[(n/2)!\right]^2} \qquad \text{illetve} \qquad P_{2k+1}(0) = 0 \tag{1.15}$$

- Ortogonalitás:

$$\int_{-1}^{1} P_m P_n dx = 0 \qquad \text{ha} \qquad n \neq m \tag{1.16}$$

Biz.: Belátásához írjuk fel, hogy

$$\int_{-1}^{1} P_m L[P_n] dx = P_m (1-x^2) P_n' \big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_m' P_n' dx$$

ahol a parciálisan kiintegrált rész nulla a határokon. Látható, hogy $\int_{-1}^{1} \{P_m L[P_n] - P_n L[P_m]\} dx = 0$ Másrészt $L[P_n] = -n(n+1)P_n$ miatt $P_m L[P_n] - P_n L[P_m] = \{n(n+1) - m(m+1)\} P_n P_m$ amiből következik az ortogonalitás.

- Norma

$$\int_{-1}^{1} P_n P_n dx = \frac{2}{2n+1} \tag{1.17}$$

- Rodrigues-formula (behelyettesítéssel ellenőrizhető)

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \tag{1.18}$$

- Integrál-előállítás a z-t körülvevõ zárt görbére vett integrállal

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(t^2-1)^n}{t-z} dt = \frac{2^{-n}}{2\pi i} \oint \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}} dt \tag{1.19}$$

Biz.: Levezethető az

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(t)}{t-z} dt \tag{1.20}$$

Cauchy-formulából speciálisan $f(z) = (z^2-1)^n$ választással. Ekkor

$$(z^2-1)^n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(t^2-1)^n}{t-z} dt \tag{1.21}$$

majd n-szer differenciálva es szorozva $\frac{1}{2^n n!}$ -sal kapjuk az állítást.

- Generátorfüggvény:

$$g(x,u) = \frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) u^n \text{ ahol } |u| < 1 \tag{1.22}$$

Megjegyzés: Speciális eset. Általánosabb az 'ultraszférikus polinomok' családja, melyek az ún. Gegenbauer-polinomok konstanszorosai

$$\frac{1}{(1-2xu+u^2)^{\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\alpha)}(x) u^n \tag{1.23}$$

- Legendre-sor: **Teljes rendszer**, azaz $f(x)$ és első deriváltja szakaszonként folytonos a $[-1,1]$ intervallumon, akkor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \quad \text{ahol} \quad a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx \tag{1.24}$$

Másként fogalmazva a teljességi összefüggés

$$\delta(x-t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(x) P_n(t) \tag{1.25}$$

- Rekurziók:

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x) \tag{1.26}$$

A deriváltakra elsőrendű diff-egyenletek, de több index van bennük (szemben a Legendre-egyenlettel: egy index, de másodrendű)

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) \tag{1.27}$$
$$(n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) \tag{1.28}$$
$$(1-x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x) \tag{1.29}$$

és hasonlóak (az előzőek kombinációi)
Biz.:
i) differenciálva a generátorfüggvényt u szerint

$$\frac{\partial}{\partial u} g(x,u) = \frac{x-u}{1-2xu+u^2} g(x,u) \tag{1.30}$$

kapjuk, hogy

$$(x-u) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) u^n = \left(1-2xu+u^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) u^{n-1}$$

amiből u^n együtthatóira

$$xP_n(x) - P_{n-1}(x) = (n+1)P_{n+1}(x) - 2xnP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x) \tag{1.31}$$

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) \tag{1.32}$$

vagy $n \to (n-1)$ helyettesítéssel

$$(2n-1)xP_{n-1}(x) = nP_n(x) + (n-1)P_{n-2}(x) \tag{1.33}$$

ii) differenciálva a generátorfüggvényt x szerint

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x,u) = \frac{u}{1-2xu+u^2} g(x,u) \tag{1.34}$$

azaz

$$u \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)u^n = \left(1 - 2xu + u^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)u^n$$

amiből u^{n+1} együtthatóira $P_n(x) = P_{n+1}'(x) - 2xP_n'(x) + P_{n-1}'(x)$. Megkapjuk a (1.28) formulát, ha kivonjuk ennek n-szeresét az előbb bizonyított (1.32) egyenlet deriváltjából

$$(2n+1)\left(P_n(x) + xP_n'(x)\right) = (n+1)P_{n+1}'(x) + nP_{n-1}'(x) \tag{1.35}$$

- A fizikában rendkívül hasznos és fontos formula

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_{1-}\mathbf{r}_2|} = \frac{1}{r_>} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^n P_n(cos(\vartheta)) \tag{1.36}$$

Biz.: A generátorfüggvény segítségével

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_{1-}\mathbf{r}_2|} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2cos(\vartheta)}} = \frac{1}{r_>}\frac{1}{\sqrt{1+u-2ux}} \quad \text{ahol } \; u = \frac{r_<}{r_>} \; \leq 1 \; \text{ és } \; x = cos(\vartheta) \tag{1.37}$$

1.4. Asszociált Legendre-egyenlet

Differenciáljuk m-szer a L-egyenletet

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} \left\{(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n\right\} = -n(n+1)\frac{d^m}{dx^m}P_n \tag{1.38}$$

Bevezetve az

$$u\,(x) = \frac{d^m}{dx^m}P_n = P_n^{(m)}(x) \tag{1.39}$$

függvényt és elvégezve a differenciálást

$$\sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \frac{d^k(1-x^2)}{dx^k} \frac{d^{2-k}}{dx^{2-k}} u = -n(n+1)u$$

kapjuk az u-ra vonatkozó differenciálegyenlelet:

$$(1-x^2)u'' - 2x\,(m+1)\,u' = \{m(m+1) - n(n+1)\}\,u \tag{1.40}$$

Definiáljuk a

$$P_n^m(x) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^m u = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m)}(x) \tag{1.41}$$

függvenyt, némi kézimunka után megmutathatjuk, hogy $P_n^m(x)$ kielégíti az asszociált Legendre-egyenlet:

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n^m\right\} = \left\{\frac{m^2}{1-x^2} - n(n+1)\right\}P_n^m \quad \text{azaz} \quad L\left[P_n^m\right] = \left\{\frac{m^2}{1-x^2} - n(n+1)\right\}P_n^m \tag{1.42}$$

A reguláris megoldások, az asszociált n-edfokú, m-edrendű Legendre-polinomok tehát

$$P_n^m(x) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^m \frac{d^m}{dx^m}P_n \tag{1.43}$$

- *Megjegyzés*: $(-1)^m$ fáziskonvenció gyakori előtte.
- Természetesen, mivel P_n n-edfokú polinom, $0 \le m \le n$.
- A Rodrigues-formulával $-n \le m \le n$ egész számokra általánosíthatjuk

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^m \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n \tag{1.44}$$

  Azonban így nem kapunk új megoldásokat, hiszen ekkor

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(x) \tag{1.45}$$

- *Megjegyzés*: Használatos a $P_n^{-|m|}(x) = P_n^{|m|}(x)$ konvenció is
- Példák

$$\begin{aligned} &P_0^0 = 1 \\ &P_1^0 = \begin{cases} x \\ cos(\vartheta) \end{cases} \qquad P_1^1 = \begin{cases} (1-x^2)^{1/2} \\ sin(\vartheta) \end{cases} \\ &P_2^0 = \begin{cases} \frac{1}{2}(3x^2-1) \\ cos^2(\vartheta) - \frac{1}{2}sin^2(\vartheta) \end{cases} \qquad P_2^1 = \begin{cases} 3x(1-x^2)^{1/2} \\ 3sin(\vartheta)cos(\vartheta) \end{cases} \qquad P_2^2 = \begin{cases} 3(1-x^2) \\ 3sin^2(\vartheta) \end{cases} \end{aligned} \tag{1.46}$$

- Paritás: $(-1)^n$ jön Legendre P_n-ből, ehhez még m-szeres deriválás miatt $(-1)^m$ azaz

$$P_n^m(-x) = (-1)^{n+m}P_n^m(x) \tag{1.47}$$

- Speciális értékek

$$P_n^m(\pm 1) = 0 \qquad m \ne 0 \tag{1.48}$$
$$P_n^n(cos\vartheta) = (2n-1)!!sin^n\vartheta \tag{1.49}$$

- Generátorfüggvény

$$\frac{(2m)!(1-x^2)^{m/2}}{2^m m!(1-2tx+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{s=0}^{\infty} P_{s+m}^m(x)t^s \tag{1.50}$$

- Rekurzió

$$\frac{2mx}{\sqrt{1-x^2}}P_n^m = P_n^{m+1} + \{n(n+1) - m(m-1)\}P_n^{m-1} \tag{1.51}$$
$$(2n+1)xP_n^m = (n+m)P_{n-1}^m + (n-m+1)P_{n+1}^m \tag{1.52}$$
$$(2n+1)\sqrt{1-x^2}P_n^m = P_{n+1}^{m+1} - P_{n-1}^{m+1} \tag{1.53}$$

  Biz.: az utolsóra a Legendre polinomok rekurziós formuláját differenciálva

$$(2n+1)P_n = P'_{n+1} - P'_{n-1} \qquad \Rightarrow \qquad (2n+1)P_n^{(m)} = P_{n+1}^{(m+1)} - P_{n-1}^{(m+1)}$$

  majd alkalmasan megszorozva

$$\sqrt{1-x^2}(2n+1)\left(\sqrt{1-x^2}\right)^m P_n^{(m)} = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{m+1} P_{n+1}^{(m+1)} - \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{m+1} P_{n-1}^{(m+1)}$$

- Ortogonalitás és norma:

$$\int_{-1}^{1} P_n^m P_{\tilde{n}}^m dx = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{2}{2n+1} \cdot \delta_{n,\tilde{n}} \quad \text{azonos } m-re \tag{1.54}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{P_n^m P_n^{\tilde{m}}}{1-x^2} dx = \frac{1}{m}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{m,\tilde{m}} \quad \text{azonos } n-re \tag{1.55}$$

Utóbbit úgy is felfoghatjuk, hogy P_n^m és $P_n^{\tilde{m}}$ a $w(x) = \left(1-x^2\right)^{-1}$ súlyfüggvényre vonatkoztatva ortogonális. Az első ortogonalitási egyenlet sokkal fontosabb, mert a fizikában az $m = \tilde{m}$ feltétel többnyire már a φ−ben bekövetkezik.
Biz.: Éppúgy mint L-nél

$$0 = \int_{-1}^{1} \left\{P_{n_1}^{m_1} L[P_{n_2}^{m_2}] - P_{n_2}^{m_2} L[P_{n_1}^{m_1}]\right\} dx$$

$$= \left\{m_2^2 - m_1^2\right\} \int_{-1}^{1} \frac{P_{n_1}^{m_1} P_{n_2}^{m_2}}{1-x^2} dx - \{n_2(n_2+1) - n_1(n_1+1)\} \int_{-1}^{1} P_{n_1}^{m_1} P_{n_2}^{m_2} dx$$

- Nagyon fontos: **Addíciós tétel**

$$P_n^0\left(cos\left(\gamma_{12}\right)\right) = P_n^0\left(cos\vartheta_1\right) \cdot P_n^0\left(cos\vartheta_2\right) + 2\sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m\left(cos\vartheta_1\right) \cdot P_n^m\left(cos\vartheta_2\right) \cdot cos\left(m(\varphi_1-\varphi_2)\right) \tag{1.56}$$

ami a

$$cos\gamma_{12} = cos\vartheta_1 cos\vartheta_2 + sin\vartheta_1 sin\vartheta_2 cos(\varphi_1-\varphi_2) \tag{1.57}$$

gömbháromszögekre vonatkozó összefüggés segítségével vezethető le.

1.5. Másodfajú Legendre-függvények

Megmutatható, hogy az $x = \pm 1$-ben logaritmikusan divergáló végtelen sorokkal definiált függvények általános alakja

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) ln\frac{1+x}{1-x} - K_n(x) \tag{1.58}$$

ahol K_n egy $n-1$-ed fokú polinom. Ha $x = cos\vartheta$, akkor ezek a 'z-tengelyen' szinguláris megoldásokat adják

- F.Neumann-féle integrál-előállítás

$$Q_n(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)}{x-t} dt \tag{1.59}$$

- Kiterjeszthetők a komplex síkra ($z \neq \pm 1$)
- Példák

$$Q_0(z) = \frac{1}{2} \cdot ln\frac{1+z}{1-z} \tag{1.60}$$

$$Q_1(z) = \frac{1}{2} z \cdot ln\frac{1+z}{1-z} - 1 \tag{1.61}$$

$$Q_2(z) = \frac{1}{2} P_2(z) \cdot ln\frac{1+z}{1-z} - \frac{3}{2} P_1(z) \tag{1.62}$$

- Rekurziók: Ugyanazok, mint a Legendre-polinomokra, ahonnan kapjuk, hogy általánosan

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} P_n(z) \cdot ln\frac{1+z}{1-z} - \frac{2n-1}{1 \cdot n} P_{n-1}(z) - \frac{2n-5}{3 \cdot (n-1)} P_{n-3}(z) - ... \tag{1.63}$$

- Asszociált másodfajú Legendre-függvények

$$Q_n^m(x) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^m \frac{d^m}{dx^m} Q_n(x) \tag{1.64}$$

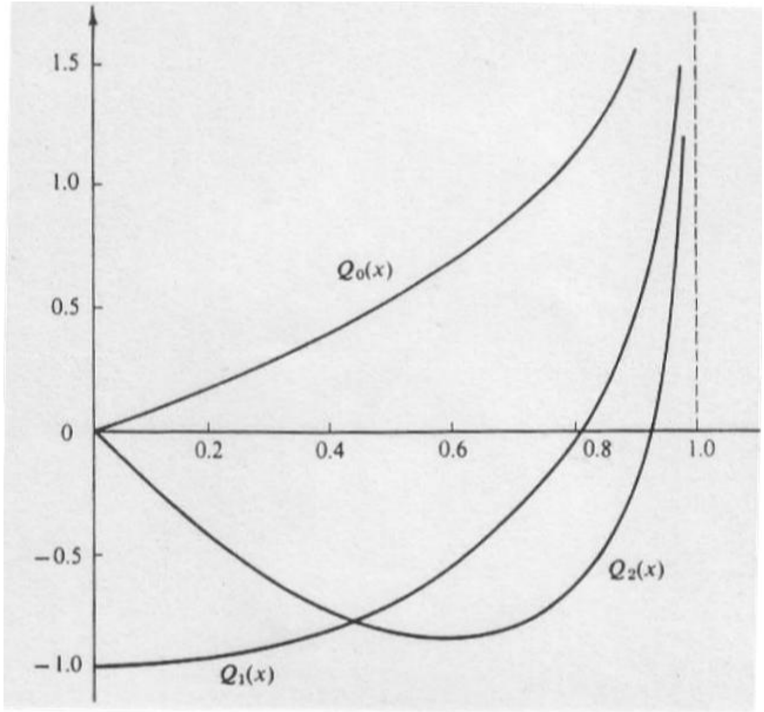


FIG. 2: Legendre-függvények

1.6. Gömbfüggvények (spherical harmonics)

Szférikusak, mert a gömb felületét paraméterezõ (ϑ, φ) koordinátákon adottak. Harmonikusak, mert Laplace-egyenlet megoldásai, azaz a

$$\Theta_{l,m}(\vartheta)\Phi_m(\varphi) \sim P_l^m\,(cos\vartheta)\,e^{im\varphi} \tag{1.65}$$

szorzat alakú megoldások normált változatai:

$$Y_l^m(\vartheta,\varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}\,(cos\vartheta)\,e^{im\varphi} \tag{1.66}$$

A $(-1)^m$ fázisfaktor a Condon-Shortley-konvenció (klasszikus spektroszkópiából, alternáló előjeleket ad)

- **Ortonormált** rendszer (felülvonás komplex konjugáltat jelez)

$$\int \bar{Y}_{l1}^{m1}(\vartheta,\varphi)Y_{l2}^{m2}(\vartheta,\varphi)d\Omega = \delta_{m1,m2}\delta_{l1,l2} \quad \text{ahol} \quad \int ......d\Omega = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\pi} ....sin\vartheta d\vartheta d\varphi \tag{1.67}$$

- **Teljes** (zárt) rendszer

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \bar{Y}_l^m(\vartheta_1,\varphi_1)Y_l^m(\vartheta_2,\varphi_2) = \delta(cos\vartheta_1 - cos\vartheta_2)\delta(\varphi_1-\varphi_2) = \frac{1}{sin\vartheta_1}\delta(\vartheta_1-\vartheta_2)\delta(\varphi_1-\varphi_2) \tag{1.68}$$

amivel a gömb felületén értelmezett $f(\vartheta,\varphi)$ függvények Laplace-sora

$$f(\vartheta,\varphi) = \sum_{l,m} a_{l,m}Y_l^m(\vartheta,\varphi) \quad \text{ahol} \quad a_{l,m} = \int \bar{Y}_l^m(\vartheta,\varphi)f(\vartheta,\varphi)d\Omega \tag{1.69}$$

- Példák

$$
\begin{array}{lll}
Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} & & \\
Y_1^0 = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} cos\vartheta & Y_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} sin\vartheta e^{\pm i\varphi} & \\
Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\right) & Y_2^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3 sin\vartheta cos\vartheta e^{\pm i\varphi} & Y_2^{\pm 2} = \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 sin^2\vartheta e^{\pm 2i\varphi}
\end{array}
\tag{1.70}
$$

- **Addíciós tétel** (1.56) a gömbfüggvényekkel felírva

$$P_l(cos\gamma_{12}) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\vartheta_1,\varphi_1)\bar{Y}_l^m(\vartheta_2,\varphi_2) \tag{1.71}$$

2. GAMMA-FÜGGVÉNY ÉS TÁRSAI

2.1. Gamma mint a faktorális általánosítása

Euler definícója a komplex síkon

$$\Gamma(z) = lim_{n\to\infty} \quad \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \quad \text{miközben} \quad z \neq 0, -1, -2, -3, ... \tag{2.1}$$

- Differenciaegyenlet

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.2}$$

Biz.:

$$\Gamma(z+1) = lim_{n\to\infty} \quad \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)(z+n+1)} n^{z+1} = lim_{n\to\infty} \quad \frac{nz}{(z+n+1)}\Gamma_n(z) = z\Gamma(z)$$

- A faktoriális általánosítása

$$z! \doteq \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.3}$$

hiszen nemnegatív egészekre

$$\Gamma(1) = lim_{n\to\infty} \quad \frac{n}{n+1} = 1 \quad \text{és} \quad n\Gamma(n) = \Gamma(n+1) \quad \text{miatt} \quad \Gamma(n) = (n-1)! \tag{2.4}$$

Speciálisan $0! = 1$ és $n! = \pm\infty$ ha n negatív egész

- A valós tengelyen $x!$ minimuma: $x! = (0.46163...)! = 0.88560...$

- Integrál-előálllítás csak a felső félsíkra (Euler)

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad \Re e(z) > 0 \tag{2.5a}$$

Biz.: A két Euler-féle definícó konzisztens, ugyanis megmutatjuk, hogy

$$\Gamma_n(z) = I(n,z) = \int_0^n \left[1 - \frac{t}{n}\right]^n t^{z-1} dt \quad \Re e(z) > 0$$

Valóban, parciálisan integrálva (legyen $u = t/n$)

$$
\begin{array}{ll}
I(n,z) = n^z \int_0^1 [1-u]^n u^{z-1} du & \Rightarrow \frac{I(z,n)}{n^z} = \left.\frac{[1-u]^n u^z}{z}\right|_0^1 + \frac{n}{z}\int_0^1 [1-u]^{n-1} u^z du \\
\frac{I(z,n)}{n^z} = \frac{n}{z}\cdot\frac{n-1}{z+1}\cdots\frac{2}{z+n-1}\int_0^1 u^{z+n-1} du & \Rightarrow I(z,n) = n^z\cdot\frac{n}{z}\cdot\frac{n-1}{z+1}\cdots\frac{2}{z+n-1}\cdot\frac{1}{z+n} = \Gamma_n(z)
\end{array}
$$

miközben az integrál limesze:

$$lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{t}{n}\right]^n = e^{-t} \quad \text{és} \quad lim_{n\to\infty} I(n,z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

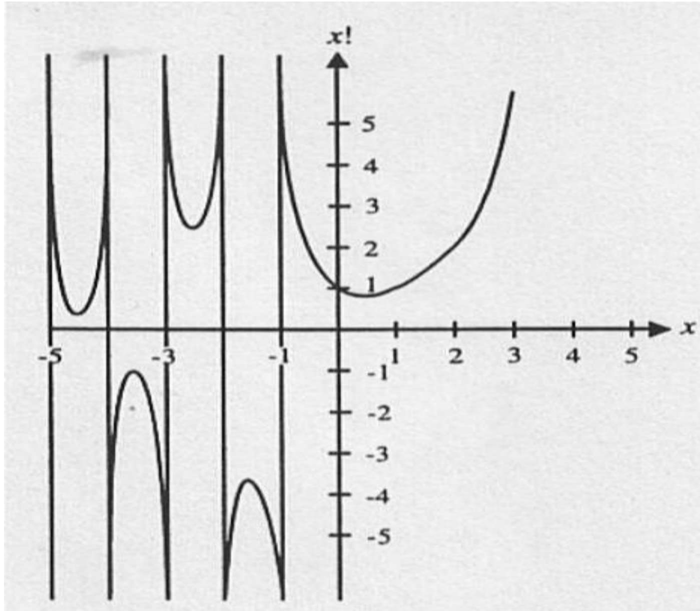


FIG. 3: $x! = \Gamma(x+1)$ a valós tengelyen

- Ekvivalens integrálok (a fizikában gyakori)

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1} dt \quad \Re e(z) > 0 \qquad \text{vagy} \qquad \Gamma(z) = \int_0^1 \left[ln(\frac{1}{t}) \right]^{z-1} dt \quad \Re e(z) > 0 \tag{2.6}$$

- Félegész értékekre előbb

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \tag{2.7}$$

majd $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ rekurzióval tovább.... *Biz.:* Például az előbbi integrálokkal $\Gamma(1/2) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$

- Weierstrass-szorzat előállítás a $|z| < \infty$ teljes komplex síkon

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{z}{n} \right] e^{-z/n} \qquad \text{ahol} \qquad \gamma = 0.577216... \text{ (Euler-Mascheroni konstans)} \tag{2.8}$$

Biz. Az Euler-sorozatot átírjuk

$$\frac{1}{\Gamma_n(z)} = n^{-z} z \frac{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} = ze^{-z \cdot ln(n)} \prod_{m=1}^{n} \left[1 + \frac{z}{m} \right]$$

majd bővítjük az

$$exp\left(\left[1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \right] z \right) = \prod_{m=1}^{n} e^{z/m}$$

kifejezéssel. Ekkor

$$\frac{1}{\Gamma_n(z)} = z \cdot exp\left(\left[1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - ln(n) \right] z \right) \prod_{m=1}^{n} \left[1 + \frac{z}{m} \right] e^{-z/m}$$

és

$$lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - ln(n) \right] = \gamma = 0.577216... \tag{2.9}$$

- A Weierstrass-előállítás segítségével megmutatható, hogy

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sin(z\pi)} \tag{2.10}$$

Biz.: Felhasználandó a $sin(x)$ függvény egyébként is igen hasznos végtelen szorzat alakú előállítása

$$sin(x) = x\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right] \tag{2.11}$$

Következmény: Megintcsak látható, hogy $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$. Továbbá

$$z!(-z)! = \frac{\pi z}{sin(z\pi)} \tag{2.12}$$

- Megjegyzés: gyakorta használatos a két-faktoriális

$$(2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \qquad \text{és} \qquad (2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n) = 2^n n! \tag{2.13}$$

2.2. Digamma, Polygamma

Szükség lehet a Gamma-függvény deriváltjaira, de ez kényelmetlen az eredeti (2.1) szorzat alakban. Így inkább az

$$ln(\Gamma(z)) = lim\left[ln(n!) + z\cdot ln(n) - ln(z) - ln(z+1) - ... - ln(z+n)\right] \tag{2.14}$$

logaritmus-összeg differenciálásával foglalkozunk. A **poligamma-** (di-, tri-, tetra-, pentagamma....) függvényeket a

$$\Psi^{(m)}(z) = \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}ln\left(\Gamma(z)\right) \tag{2.15}$$

módon definiáljuk. A $\Psi\equiv\Psi^{(0)}$ digamma-függvény ezek szerint

$$\Psi(z) = lim\left[ln(n) - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{z+k}\right] \qquad \text{és általában} \qquad \Psi^{(m)}(z) = (-1)^{m+1}m!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z+k)^{m+1}} \tag{2.16}$$

- *Megjegyzés:* Szokásos alternatív definíció a

$$\tilde{\Psi}^{(m)}(z) = \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}ln\left(z!\right) = \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}ln\left(z\Gamma(z)\right) = (-1)^m m!\frac{1}{z^{m+1}} + \Psi^{(m)}(z) = (-1)^{m+1}m!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(z+k)^{m+1}} \tag{2.17}$$

speciálisan

$$\tilde{\Psi}(z) = \frac{1}{z} + \Psi(z) \tag{2.18}$$

- Rekurzió (Differenciaegyenlet az előzőből, hiszen $\tilde{\Psi}^{(m)}(z) = \Psi^{(m)}(z+1)$)

$$\Psi^{(m)}(z+1) = (-1)^m m!\frac{1}{z^{m+1}} + \Psi^{(m)}(z) \tag{2.19}$$

- Weierstrass-szorzat alapján

$$\Psi(z) = -\frac{1}{z} - \gamma - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right] = -\frac{1}{z} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n\left(z+n\right)} \tag{2.20}$$

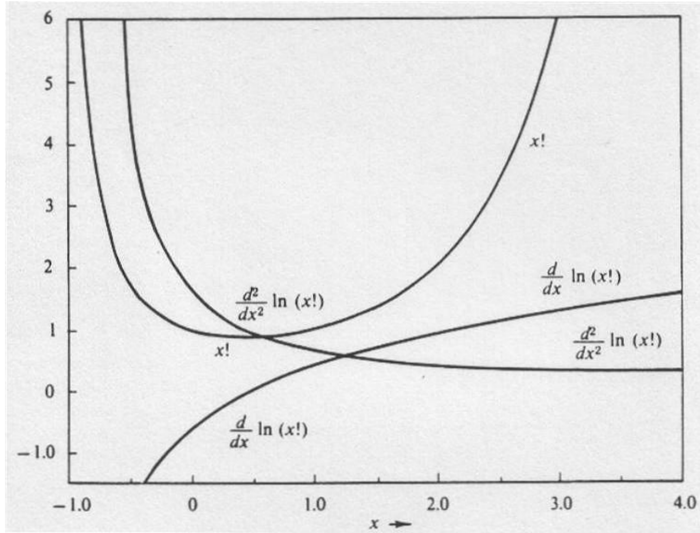


FIG. 4: Poligamma-függvények

- Speciális értékek (az előbbiből)

$$\tilde{\Psi}(0) = -\gamma \;\; \acute{e}s \;\; \tilde{\Psi}(k) = -\gamma + \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \quad \text{valamint} \quad \Psi(1) = -\gamma \quad \acute{e}s \quad \Psi(k) = -\gamma + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n} \tag{2.21}$$

továbbá

$$\tilde{\Psi}^{(m)}(0) = (-1)^{m+1} m! \zeta(m+1) = \Psi^{(m)}(1) \;\; ; \;\; m = 1, 2, 3... \quad \text{és} \quad \zeta(m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} \quad \text{a Riemann-zeta fgv.} \tag{2.22}$$

- MacLaurin-sor

$$ln(z!) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tilde{\Psi}^{(n-1)}(0) = -\gamma z + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n} \zeta(n) \tag{2.23}$$

konvergens, ha $|z| < 1$. Kiválóan alkalmas valós vagy komplex számok faktoriálisának számítására.

- Sorok összegzése. Használható racionális törtekből álló sorok összegének a meghatározására. Ha a számlálóban levő legmagasabb indexhatvány legalább kettővel kisebb, mint a nevezőben, akkor parciális törtekre bontunk. Digamma, poligamma felismerhető, elővesszük a kívánt numerikus értéket.
Példa: Catalan-állandó

$$K = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \qquad \Rightarrow \qquad K = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)^2} - \frac{1}{9} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)^2}$$

ahol szétválogattuk a $k = 2n$ es a $k = 2n+1$ különböző előjelűeket. Felismerhető, hogy a poligamma-függvénnyel ez

$$K = \frac{8}{9} + \frac{1}{16} \tilde{\Psi}^{(1)}(1/4) - \frac{1}{16} \tilde{\Psi}^{(1)}(3/4) = 0.91596559... \tag{2.24}$$

2.3. Béta-függvény

Két szám faktoriálisainak szorzatát (2.5a) alapján integrálok szorzataként is felírhatjuk

$$m!n! = lim_{a^2 \to \infty} \int_0^{a^2} e^{-u} u^m du \cdot \int_0^{a^2} e^{-u} u^n du = lim_{a \to \infty} 4 \int_0^a e^{-x^2} x^{2m+1} dx \cdot \int_0^a e^{-y^2} y^{2n+1} dy \tag{2.25}$$

Az utóbbi integrálok limesze felfogható úgy is, mint a negyedfélsíkra való tartomány-integrálás. Áttérhetünk polárkoordinátákra:

$$m!n! = 4\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2m+2n+3} dr \cdot \int_0^{\pi/2} cos^{2m+1}(\varphi) sin^{2n+1}(\varphi) d\varphi = 2\cdot(m+n+1)! \int_0^{\pi/2} cos^{2m+1}(\varphi) sin^{2n+1}(\varphi) d\varphi$$

Innen származik a Béta-függvény definíciója:

$$B(m+1,n+1) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} = 2\int_0^{\pi/2} cos^{2m+1}(\varphi) sin^{2n+1}(\varphi) d\varphi \tag{2.26}$$

illetve nem egész számokra is általánosítva

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{2.27}$$

- Integrál-előállítások

$$B(m+1,n+1) = \int_0^1 t^m (1-t)^n dt \qquad (\cos^2\vartheta \to t) \tag{2.28}$$

$$= \int_0^1 x^{2m+1}(1-x^2)^n dx \qquad (t \to x^2) \tag{2.29}$$

$$= \int_0^\infty \frac{u^m}{(1+u)^{m+n+2}} du \qquad (t \to u/(1+u)) \tag{2.30}$$

- Megemlítendő az 'Incomplete (nem teljes) BETA' integrál-függvény

$$B_x(m+1,n+1) = \int_0^x t^m (1-t)^n dt \tag{2.31}$$

2.4. Incomplete Gamma és rokonai

Az Euler-féle Gamma-integrált a felső határ függvényeként tekintve értelmezzük az Incomplete (hiányos, nem teljes) Gamma-függvényeket

$$\gamma(a,x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt \quad \text{és} \quad \Gamma(a,x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1} dt \quad \Re e(a) > 0 \tag{2.32}$$

A két függvény egymás komplementere, abban az értelemben, hogy $\gamma(a,x) + \Gamma(a,x) = \Gamma(a)$.

- Pozitív egészekre $(a = n)$ az integrálás elvégezhető

$$\gamma(n,x) = (n-1)!\left(1 - e^{-x}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{x^s}{s!}\right) \tag{2.33}$$

- Hibafüggvény (Error function)

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\gamma(1/2, z^2) \tag{2.34}$$

- Integrálexponenciális

$$E_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (|arg(z)| < \pi) \qquad \text{és csak valós } x-\text{re} \qquad -Ei(-x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt = E_1(x) \tag{2.35}$$

Utóbbi logaritmikusan divergál $x \to 0$ körül. Nyilvánvaló, hogy $E_1(x) = \Gamma(0,x) = lim_{a\to 0}\left[\Gamma(a) - \gamma(a,x)\right]$

- Integrálszinusz

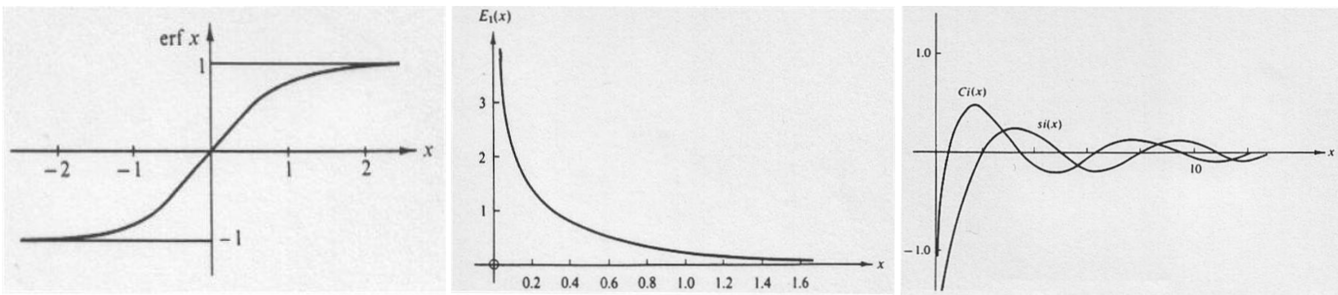
$$Si(z) = \int_0^z \frac{sin(t)}{t}dt \text{ és } si(z) = Si(z) - \frac{\pi}{2} = -\int_x^\infty \frac{sin(t)}{t}dt \qquad \text{továbbá} \qquad si(x) = \frac{1}{2i}\left[Ei(ix) - Ei(-ix)\right] \tag{2.36}$$

Integrálkoszinusz

$$Ci(z) = -\int_z^\infty \frac{cos(t)}{t}dt \qquad \text{amiből} \qquad Ci(x) = \frac{1}{2}\left[Ei(ix) + Ei(-ix)\right] \tag{2.37}$$

Integrállogaritmus

$$li(x) = \int_0^x \frac{du}{ln(u)} = Ei(ln(x)) \quad (x > 1) \tag{2.38}$$



Hibafüggvény Integrálexponenciális Integrálkoszinusz és integrálszinusz

FIG. 5: Integrál-függvények

Az előbbiekben bevezetett függvények (és általában a speciális függvények) definíciója nem egységes. Gyakori, hogy előjelben és konstansokban az iméntiektől eltérően használják őket.

3. TOVÁBBI ORTOGONÁLIS FÜGGVÉNYEK (POLINOMOK)

3.1. Hermite-polinomok

- Generátorfüggvény

$$g(x,t) = e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^\infty H_n(x)\frac{t^n}{n!} \quad , \quad -\infty < x < \infty \tag{3.1}$$

- Rekurzió

$$-2nH_{n-1}(x) + 2xH_n(x) = H_{n+1}(x) \qquad \text{és} \qquad 2nH_{n-1}(x) = H_n'(x) \tag{3.2}$$

Biz.: Előbbi

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = -2(t-x)g(x,t) \quad \Rightarrow \quad -2(t-x)\sum_{n=0}^\infty H_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^\infty nH_n(x)\frac{t^{n-1}}{n!} \tag{3.3}$$

Utóbbi

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial x} = 2tg(x,t) \quad \Rightarrow \quad 2t\sum_{n=0}^\infty H_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^\infty H_n'(x)\frac{t^n}{n!} \tag{3.4}$$

- Példák: A generátorfüggvényből

$$g(x,t) = g(x,0) + \left.\frac{\partial g(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} \cdot t + ... = 1 + 2x \cdot t + ... \qquad \Rightarrow \qquad H_0(x) = 1 \;\; \acute{e}s \;\; H_1(x) = 2x \tag{3.5}$$

majd rekurzióval

$$H_2(x) = 4x^2 - 2 \;\; ; \;\; H_3(x) = 8x^3 - 12x \;\; ; \;\; H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12 \;\; ; \;\; H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x \tag{3.6}$$

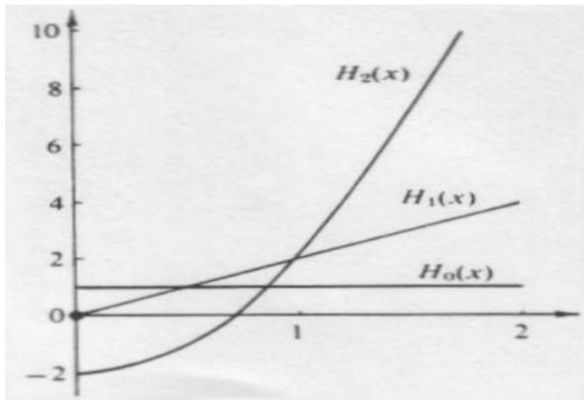


FIG. 6: Hermite-polinomok

- Specális értékek

$$g(0,t) = e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \qquad \Rightarrow \qquad H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \;\; \text{és} \;\; H_{2n+1}(0) = 0 \tag{3.7}$$

- Paritás:

$$g(-x,t) = g(x,-t) \quad \rightarrow \quad H_n(-x) = (-1)^n H_n(x) \tag{3.8}$$

- Rodrigues-reprezentáció

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \tag{3.9}$$

Biz.: A generátorfüggvényből

$$g(x,t) = e^{-t^2+2tx} = e^{x^2} e^{-(t-x)^2} \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(t-x)^2} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-(t-x)^2}$$

miatt

$$H_n(x) = \left.\frac{\partial^n}{\partial t^n} g(x,t)\right|_{t=0} = e^{x^2} \left.\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(t-x)^2}\right|_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \left.\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-(t-x)^2}\right|_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

- Polinom-alak például $g(x,t)$ x szerinti hatványsorából

$$H_n(x) = \sum_{s=0}^{[n/2]} (-1)^s (2x)^{n-2s} \frac{n!}{(n-2s)!s!} \tag{3.10}$$

- Integrál-előállítás

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{g(x,t)}{t^{n+1}} dt \quad \text{az origót körülvevő zárt görbére} \tag{3.11}$$

- Differenciálegyenlet: (Rekurziós formulákból további differenciálással)

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \tag{3.12}$$

- Hermite-függvények

$$\varphi_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2} \quad \text{illetve} \quad H_n(x) = \varphi_n(x)e^{x^2/2} \tag{3.13}$$

A függvényekre átírva a differenciálegyenletet kapjuk, hogy

$$\varphi_n''(x) + (2n+1-x^2)\varphi_n(x) = 0 \tag{3.14}$$

ami láthatóan önadjungált.

- Következésképpen az Hermite-függvények ortogonálisak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = 0 \qquad m \neq n \tag{3.15}$$

amiből az Hermite-polinomok a $w(x) = e^{-x^2}$ súlyfüggvény szerint ortogonálisak

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = 0 \qquad m \neq n \tag{3.16}$$

- A Hermite-függvények teljes függvényrendszert alkotnak az $L^2(\mathbb{R})$ Hilbert-téren.
- Norma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)\varphi_n(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x)e^{-x^2}dx = 2^n\sqrt{\pi}n! \tag{3.17}$$

Biz.:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{g(x,t)g(x,s)e^{-x^2} = e^{-x^2}e^{-t^2+2tx}e^{-s^2+2sx} = e^{-(x-t-s)^2}e^{2st} = e^{-x^2}\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}H_m(x)\frac{s^m}{m!}\right\}dx$$

segítségével

$$\sqrt{\pi}e^{2st} = \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{s^m}{m!}\int_{-\infty}^{\infty}H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}dx \quad \text{vagy} \quad \sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n s^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{s^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}H_n^2(x)e^{-x^2}dx$$

3.2. Laguerre-függvények

- Generátorfüggvény: A z-szerinti Maclaurin-sor együtthatói az $L_n(x)$ Laguerre-polinomok

$$g(x,z) = \frac{e^{-xz/(1-z)}}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)z^n \qquad |z| < 1 \qquad 0 \leq x \leq \infty$$

- Rekurzió

$$-nL_{n-1}(x) + (2n+1-x)L_n(x) = (n+1)L_{n+1}(x) \quad \text{és} \quad nL_n(x) - nL_{n-1}(x) = xL_n'(x) \tag{3.18}$$

- Indulónak a generátorfüggvényből

$$L_0(x) = 1 \;\;;\;\; L_1(x) = -x+1 \tag{3.19}$$

majd rekurzióval

$$2!L_2(x) = x^2 - 4x + 2 \;\;;\;\; 3!L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6 \;\;;\;\; 4!L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24 \tag{3.20}$$

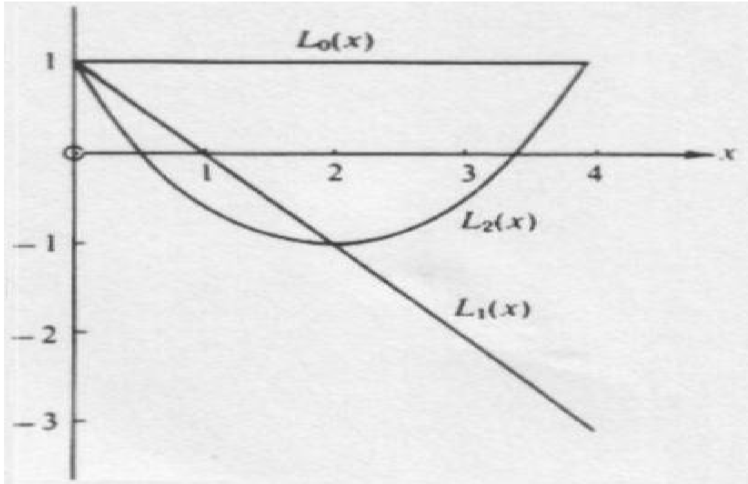


FIG. 7: Laguerre-polinomok

- Speciális értékek

$$L_n(0) = 1 \tag{3.21}$$

- n-edfokú polinomok, nincs paritásuk
- Rodrigues-reprezentáció

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right) \tag{3.22}$$

- Hatványsor

$$L_n(x) = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \frac{n!}{(n-m)!m!m!}x^m = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \binom{n}{m}\frac{x^m}{m!} \tag{3.23}$$

- Differenciálegyenlet (Laguerre-diffegyenlet)

$$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0 \tag{3.24}$$

- Laguerre-függvények

$$\varphi_n(x) = L_n(x)e^{-x/2} \text{ azaz } L_n(x) = \varphi_n(x)e^{x/2} \tag{3.25}$$

bevezetésével

$$x\varphi_n''(x) + \varphi_n'(x) + (n + 1/2 - x/4)\varphi_n(x) = 0 \tag{3.26}$$

ami önadjungált egyenlet. Nevezetes megjelenés: a kvantummechanikában a hidrogénatom radiális Schrödinger-egyenlete.

- Ortogonalitás (L_m az e^{-x} súlyfüggvényre ortogonálisak a $0 \leq x < \infty$ intevallumon), normáltak

$$\int_0^\infty \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = \int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x}dx = \delta_{n,m} \tag{3.27}$$

- Asszociált Laguerre-polinomok

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}L_{n+k}(x) \tag{3.28}$$

- Rodrigues-formula

$$L_n^k(x) = \frac{x^{-k}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+k}e^{-x}\right) \tag{3.29}$$

- Hatványsor

$$L_n^k(x) = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \frac{(n+k)!}{(n-m)!\,(k+m)!m!}x^m \qquad k > -1 \tag{3.30}$$

- Generátorfüggvény

$$g_k(x,z) = \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x) z^n \qquad |z| < 1 \qquad 0 \le x \le \infty \tag{3.31}$$

- Speciális értékek

$$L_n^k(0) = \frac{(n+k)!}{n!k!} \tag{3.32}$$

- Ortogonalitás

$$\int_0^\infty L_m^k(x) L_n^k(x) x^k e^{-x} dx = \frac{(n+k)!}{n!}\delta_{n,m} \tag{3.33}$$

- Asszociált Laguerre-függvények

$$\psi_n^k(x) = L_n^k(x) x^{k/2} e^{-x/2} \tag{3.34}$$

és a vonatkozó asszociált Laguerre-differenciálegyenlet

$$x\psi_n^k{}'' + \psi_n^k{}' + \left(-\frac{x}{4} + \frac{2n+k+1}{2} - \frac{k^2}{4x}\right)\psi_n^k = 0 \tag{3.35}$$

3.3. Csebisev-polinomok

(Chebyshev, Tschebyscheff,....)

- Utraszférikus- vagy Gegenbauer-polinomok családjából

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\alpha)}(x) t^n \qquad |x| < 1 \qquad |t| < 1 \tag{3.36}$$

spec. $\alpha = 1/2$ volt a Legendre-polinom, most

- II. fajú Csebisev: $\alpha = 1$, ami a viszonylag ritkán fordul elő és egyszerűen $C_n^{(1)}(x) = U_n(x)$
- I. fajú Csebisev: $\alpha = 0$, de óvatosan az $\alpha \to 0$ átmenettel (a bal oldal ilyenkor azonosan 1 lenne). Előbb deriválva:

$$\frac{-\alpha(-2x+2t)}{(1-2xt+t^2)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} nC_n^{(\alpha)}(x) t^{n-1} \quad \to \quad \frac{(x-t)}{(1-2xt+t^2)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2}\frac{C_n^{(\alpha)}(x)}{\alpha} t^{n-1} \tag{3.37}$$

Bevezetjük a

$$C_n^{(0)} = lim_{\alpha\to 0}\frac{C_n^{(\alpha)}}{\alpha} \tag{3.38}$$

jelölést, majd az (3.37) egyenletet megszorozzuk $2t$-vel és hozzáadunk 1-et:

$$\frac{1-t^2}{1-2xt+t^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} C_n^{(0)}(x) t^n \tag{3.39}$$

Definíció:

$$T_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} C_n^{(0)} & n > 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases} \tag{3.40}$$

Generátorfüggvény: (a határátmenet ledolgozásásval)

$$\frac{1-t^2}{1-2xt+t^2} = T_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) t^n \qquad |x| \leq 1 \qquad |t| < 1 \tag{3.41}$$

- Rekurzió

$$U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0 \quad \text{és} \quad T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0 \tag{3.42}$$

$$(1-x^2)U_n'(x) = -nxU_n(x) + (n+1)U_{n-1}(x) \quad \text{és} \quad (1-x^2)T_n'(x) = -nxT_n(x) + nT_{n-1}(x) \tag{3.43}$$

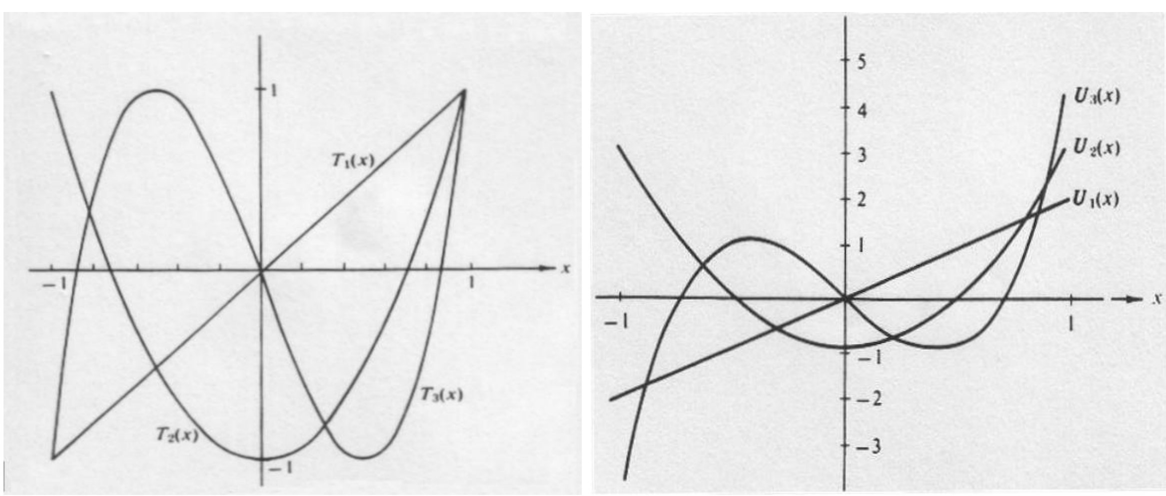
- Differenciálegyenlet (az ultraszférikus diffegyenlet speciális esete)

$$(1-x^2)T_n'' - xT_n' + n^2 T_n = 0 \qquad \text{és} \qquad (1-x^2)U_n'' - 3xU_n' + n(n+2)U_n = 0 \tag{3.44}$$

- Példák

$$T_0(x) = 1 \;\;,\;\; T_1(x) = x \;\;,\;\; T_2(x) = 2x^2 - 1 \;\;,\;\; T_3(x) = 4x^3 - 3x \;\;,\;\; T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \tag{3.45}$$

$$U_0(x) = 1 \;\;,\;\; U_1(x) = 2x \;\;,\;\; U_2(x) = 4x^2 - 1 \;\;,\;\; U_3(x) = 8x^3 - 4x \;\;,\;\; U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1 \tag{3.46}$$



Elsőfajú　　　　Másodfajú

FIG. 8: Csebisev-polinomok

- Speciális értékek

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x) \;\;,\;\; T_{2n}(0) = (-1)^n \;\;,\;\; T_{2n+1}(0) = 0 \;\;,\;\; T_n(1) = 1 \tag{3.47}$$

$$U_n(-x) = (-1)^n U_n(x) \;\;,\;\; U_{2n}(0) = (-1)^n \;\;,\;\; U_{2n+1}(0) = 0 \;\;,\;\; U_n(1) = n + 1 \tag{3.48}$$

- Ortogonalitás

$$\int_{-1}^{+1} T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{-1/2}dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi/2 & m = n \neq 0 \\ \pi & m = n = 0 \end{cases} \quad \text{és} \quad \int_{-1}^{+1} U_n(x)U_m(x)(1-x^2)^{1/2}dx = \frac{\pi}{2}\delta_{n,m} \quad (3.49)$$

- Trigonometrikus alak. Az $x = cos(\vartheta)$ helyettesítéssel belátható, hogy $T_n(cos(\vartheta))$-ra a (3.37) differenciálegyenlet alakja

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2}T_n + n^2 T_n = 0 \quad (3.50)$$

A differenciálegyenlet független megoldásai $T_n = cos(n\vartheta)$, $V_n = sin(n\vartheta)$. Hasonlóan belátható, hogy $U_n sin(\vartheta) = sin(n+1)\vartheta$ és $W_n sin(\vartheta) = cos(n+1)\vartheta$ az elsőfajú Csebisev-függvényekre felírt ultraszférikus differenciálegyenlet megoldásai. Miközben T_n és U_n polinomok (pl a rekurziókból láthatóan), a V_n és W_n függvények nem azok, hiszen

$$V_n(x) = (1-x^2)^{1/2}U_{n-1}(x) \quad , \quad W_n(x) = (1-x^2)^{-1/2}T_{n+1}(x) \quad (3.51)$$

4. BESSEL-FÜGGVÉNYEK

4.1. Elsőfajú Bessel-függvények

- Generátorfüggvény: $g(x,t)$ Laurent-sorának együtthatói. a $J_n(x)$ elsőfajú, és n-edrendű (egész indexű)Bessel-függvények

$$g(x,t) = e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n \quad , \quad t \neq 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

Ez a definíció kiterjeszthető a komplex síkra ($x \rightleftharpoons z$).

- Hatványsora (kis x-re numerikus értékek ezzel számolhatók)

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n} \frac{(-1)^s}{(s+n)!s!} \quad (4.1)$$

Biz.: A generátorfüggvény hatványsorából

$$e^{\frac{xt}{2}} e^{-\frac{x}{2t}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}\left(\frac{xt}{2}\right)^r \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!}\left(\frac{-x}{2t}\right)^s = \sum_{s,r=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{r+s} \frac{t^{r-s}}{r!s!} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n} \frac{(-1)^s}{(s+n)!s!} t^n \quad (4.2)$$

- Oszcillál, de nem periodikus (kivéve $x \to \infty$), amplitúdója csökken $x^{-1/2}$ szerint (lásd a differenciálegyenletnél).
- Nem feltétlenül egész indexre és a komplex síkon is reguláris (egész) függvény a hatványsor általánosítása

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{s=0}^{\infty} \left(-\frac{z^2}{4}\right)^s \frac{1}{s!\Gamma(s+\nu+1)} \quad (4.3)$$

- Negatív egész indexre a hatványsorból

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2s} \frac{(-1)^s}{(s-n)!s!} \quad (4.4)$$

de $(s-n)! \to \infty$ ha $s = 0, 1, ..., n-1$. Áttérve az $r = s - n$ összegző indexre

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \frac{(-1)^{r+n}}{(r+n)!r!} \quad (4.5)$$

ekkor azonban azt látjuk, hogy nem kaptunk új független függvényeket, hiszen

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (4.6)$$

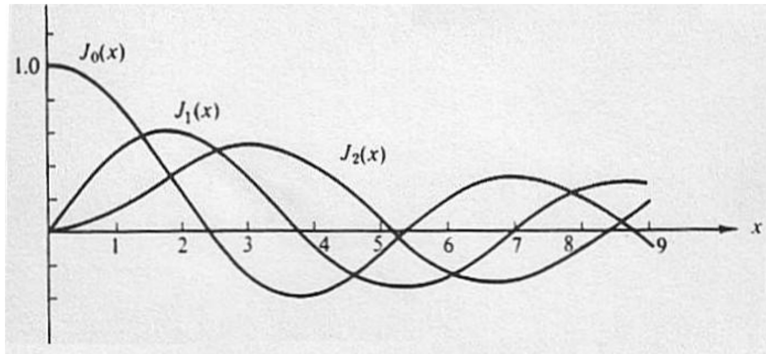


FIG. 9: Elsőfajú Bessel-függvények

- Integrál-előállítás: A generátorfüggvényben végezzük el a $t = e^{i\theta}$ helyettesítést. Ekkor

$$(t - 1/t) = e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \cdot sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad e^{ix \cdot sin(\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{ni\theta} \tag{4.7}$$

a valós és a képzetes részeket szétválogatva

$$cos(x \cdot sin(\theta)) = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (J_n(x) + J_{-n}(x))\, cos(n\theta) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) cos(2n\theta) \tag{4.8}$$

$$sin(x \cdot sin(\theta)) = \sum_{n=1}^{\infty} (J_n(x) - J_{-n}(x))\, sin(n\theta) = 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x) sin((2n-1)\theta) \tag{4.9}$$

Integrál-előállításokat kapunk, ha kihasználjuk, hogy a trigonometrikus függvények ortogonálisak, azaz

$$\int_0^{\pi} sin(n\theta) sin(m\theta) d\theta = \frac{\pi}{2}\delta_{n,m} \quad ; \quad \int_0^{\pi} cos(n\theta) cos(m\theta) d\theta = \frac{\pi}{2}\delta_{n,m} \quad \text{ha} \quad (n, m \neq 0) \tag{4.10}$$

amiből

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} sin(x \cdot sin(\theta)) sin(m\theta) d\theta = \begin{cases} J_m & m = 2n-1 \\ 0 & m = 2n \end{cases} \tag{4.11}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} cos(x \cdot sin(\theta)) cos(m\theta) d\theta = \begin{cases} J_m & m = 2n \\ 0 & m = 2n-1 \end{cases} \tag{4.12}$$

illetve kombinálva őket

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} cos(n\theta - x \cdot sin(\theta)) d\theta \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{4.13}$$

Általánosabban

$$J_n(z) = \frac{(-i)^n}{\pi}\int_0^{\pi} e^{iz \cdot cos(\theta)} cos(n\theta) d\theta \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{4.14}$$

Különösen gyakran hasznos

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix \cdot sin(\theta)} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix \cdot cos(\theta)} d\theta \tag{4.15}$$

- Rekurziók

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) \;\text{ és }\; J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x) \tag{4.16}$$

vagy kombináltak

$$J_{n-1}(x) = \frac{n}{x}J_n(x) + J_n'(x) \;\; ; \;\; \frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x) \;\; ; \;\; \frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = -x^{-n} J_{n+1}(x) \tag{4.17}$$

Biz.:

$$\frac{\partial}{\partial t}g(x,t) = \frac{1}{2}x(1+\frac{1}{t^2})g(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x)t^{n-1} \quad \textit{és} \quad \frac{\partial}{\partial x}g(x,t) = \frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})g(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(x)t$$

- Stabilizáló összeg $g(x,1)$-ből

$$J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) = 1 \tag{4.18}$$

- Addíciós-tétel

$$J_n(x+y) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(x)J_{n-s}(y) \tag{4.19}$$

Biz.: Használjuk ki, hogy a generátorfüggvényre $g(x+y,t) = g(x,t)\cdot g(y,t)$

4.2. Bessel-féle differenciálegyenlet

- Rekurziókból megmutatható, hogy az elsőfajú Bessel-függvények kielégítik $\nu = n$ mellett az alábbi differenciálegyenletet

$$x^2 J_\nu'' + xJ_\nu' + (x^2-\nu^2)J_\nu = 0 \tag{4.20}$$

Ez a Bessel-differenciálegyenlet, megoldásai tetszőleges (nem csak egész) ν mellett érdekesek.
A differenciálegyenletet másik hasznos alakja

$$J_\nu(x) = \frac{u_\nu(x)}{\sqrt{x}} \quad \text{helyettesítéssel} \quad x^2 u_\nu'' + (x^2 - \nu^2 + \frac{1}{4})u_\nu = 0 \tag{4.21}$$

- Aszimptotikus alak: Nagy x-re az aszimptotikus egyenlet $u_\nu'' + u_\nu = 0$. Ebből a Bessel-egyenlet megoldásaira megállapíthatjuk, hogy

$$J_\nu(x) \sim \frac{C_\nu}{\sqrt{x}}cos(x+\delta_\nu) \quad , \;\text{ha}\;\; |x| >> \nu \tag{4.22}$$

- A másodrendű differenciálegyenletnek a (4.1) hatványsorral ($n \leftrightarrow \pm\upsilon$ cserével) adott J_ν és $J_{-\nu}$ két **független** megoldása, ha υ nem egész szám. Láttuk az (4.6) egyenletben, hogy $\upsilon = n$ esetben J_n és J_{-n} nem függetlenek, ilyenkor újabb megoldást kell keresnünk.

4.3. Neumann- és Hankel-függvények

- Minden ν-re jó definíció a Neumann-függvény (másodfajú Bessel-fgv.)

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cdot\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \tag{4.23}$$

hiszen $\nu \neq n$-re J_ν es $J_{-\nu}$ függetlenek lineárkombinációja, tehát kielégiti a Bessel-egyenletet, és J_ν-től független. Egész indexre mind a számláló, mind a nevező nullává válik, meg kell mutatnunk, hogy a definíció ekkor is értelmes. A L'Hospital-szabály segítségével $\nu = n$-re

$$N_n(x) = \left.\frac{\frac{d}{d\nu}\left[J_\nu(x)\cdot\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)\right]}{\frac{d}{d\nu}\left[\sin(\nu\pi)\right]}\right|_{\nu=n} = \left.\frac{-J_\nu\cdot\pi\sin(\nu\pi) + \dot{J}_\nu\cdot\cos(\nu\pi) - \dot{J}_{-\nu}}{\pi\cos(\nu\pi)}\right|_{\nu=n} = \frac{1}{\pi}\left[\dot{J}_n - (-1)^n\,\dot{J}_{-n}\right] \tag{4.24}$$

ahol bevezettük a $\dot{J}_\nu = \frac{d}{d\nu} J_\nu$ jelölést. A Bessel-egyenletet differenciálva ν-szerint

$$x^2 \dot{J}_\nu'' + x \dot{J}_\nu' + (x^2 - \upsilon^2) \dot{J}_\nu = 2\upsilon J_\nu \tag{4.25}$$

majd alkalmas kombinációját véve a $\nu = \pm n$ két egyenletnek kapjuk, hogy a Neumann-függvények ekkor is kielégítik a differenciálegyenletet:

$$x^2 N_n'' + x N_n' + (x^2 - n^2) N_n = \frac{2n}{\pi} \left(J_n - (-1)^n J_{-n}\right) = 0 \tag{4.26}$$

- A Bessel-egyenlet általános megoldása tehát

$$y_\upsilon(x) = A \cdot J_\nu(x) + B \cdot N_\nu(x) \tag{4.27}$$

- $N_n(x)$ logaritmikusan szinguláris $x \to 0$ esetben, pl.

$$N_0(x) \sim \frac{2}{\pi} (\ln x + \gamma - \ln 2) + \sigma(x^2) \qquad x << 1 \tag{4.28}$$

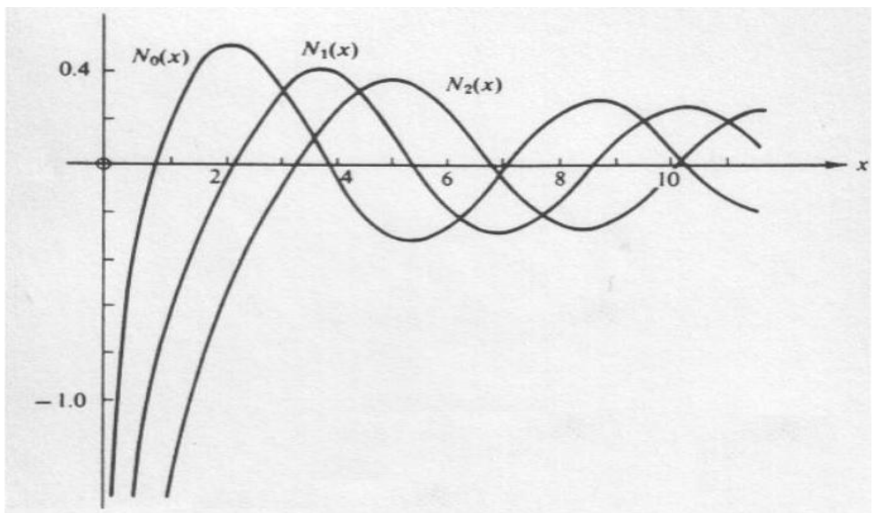


FIG. 10: Másodfajú Bessel-függvények

- Az első- és másodfajú J_ν és N_ν függvénypár helyett szokás bevezetni a Hankel-függvényeket

$$H_\upsilon^{(1)} = J_\nu + i N_\nu \quad \text{és} \qquad H_\upsilon^{(2)} = J_\nu - i N_\nu \tag{4.29}$$

- Kis argumentumokra a hatványsor eleje...

$$H_0^{(1)}(x) \sim 1 + i\frac{2}{\pi}(\ln x + \gamma - \ln 2) + ... \qquad H_\nu^{(1)}(x) \sim -i\frac{(\nu-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu + ..., \quad \nu > 0 \tag{4.30}$$

$$H_0^{(2)}(x) \sim 1 - i\frac{2}{\pi}(\ln x + \gamma - \ln 2) + ... \qquad H_\nu^{(2)}(x) \sim +i\frac{(\nu-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu + ..., \quad \nu > 0 \tag{4.31}$$

- A Hankel-függvényekre a korábban megismert egyenletek érvényesek, azaz $F_\upsilon = J_\nu, N_\nu, H_\upsilon^{(1)}, H_\upsilon^{(2)}$ mindegyikére

$$F_{\upsilon-1}(x) + F_{\upsilon+1}(x) = \frac{2\upsilon}{x} F_\upsilon(x) \ ; \ F_{\upsilon-1}(x) - F_{\upsilon+1}(x) = 2F_\upsilon'(x) \ ; \ x^2 F_\nu'' + x F_\nu' + (x^2 - \upsilon^2) F_\nu = 0 \tag{4.32}$$

4.4. Hengerszimmetrikus terek (példa)

Hengerszimmetrikus problémák tárgyalásánál a Helmholtz-egyenlet

$$\triangle\Psi + k^2\Psi = 0 \tag{4.33}$$

megoldásakor a $\Psi(\rho,\varphi,z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$ szeparációval a

$$\rho^2\frac{d^2}{d\rho^2}R_\nu(k\rho) + \rho\frac{d}{d\rho}R_\nu(k\rho) + (k^2\rho^2 - \upsilon^2)R_\nu(k\rho) = 0 \tag{4.34}$$

radiális egyenletre juthatunk Felismerhető, hogy ez éppen a Bessel-egyenlet, tehát $R_\nu = J_\nu(k\rho)$. Tekintsük az $R_\nu(ka) = 0$ **peremfeltételnek** megfelelő megoldásokat, melyek a (diszkrét) k_n értékek mellett fordulhatnak csak elő

$$R^n_\nu(ka) = J_\nu(k_n\rho): \quad J_\nu(k_n a) = 0 \;\; \rightarrow \;\; k_n = \frac{\alpha_{\nu,n}}{a} \tag{4.35}$$

Ezek a megoldások a megfelelő Bessel-függvény $\alpha_{\nu,n}$ zéróhelyeivel hozhatók kapcsolatba.

- A különböző k_n értékekhez tartozó megoldások ortogonálisak a $[0,a]$ intervallumon

$$\int_0^a \rho J_\nu(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a})J_\nu(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a})d\rho = 0 \;\; ; \;\; n \neq m \;\; ; \;\; J_\nu(\alpha_{\nu n}) = 0 \tag{4.36}$$

- Norma

$$\int_0^a \rho\left[J_\nu(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a})\right]^2 d\rho = \frac{a^2}{2}\left[J_{\nu+1}(\alpha_{\nu n})\right]^2 \tag{4.37}$$

- Fourier-Bessel sor (megelőlegezve, hogy adott υ indexű Bessel-függvények egy $\left\{J_\nu(\alpha_{\nu,j}\frac{\rho}{a})\right\}_{j=1}^\infty$ sorozata teljes rendszer)

$$f(\rho) = \sum_{j=1}^\infty c_{\nu j}J_\nu(\alpha_{\nu,j}\frac{\rho}{a}) \;\; ; \;\; 0 \le \rho \le a \;\; ; \;\; \upsilon > -1 \tag{4.38}$$

$$c_{\nu n} = \frac{2}{a^2\left[J_{\nu+1}(\alpha_{\nu n})\right]^2}\int_0^a f(\rho)J_\nu(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a})\rho d\rho \tag{4.39}$$

  azaz elegendően jól viselkedő függvények Bessel-sorba fejthetők.

- Kontinuum átmenet $[0,a] \rightarrow [0,\infty)$ esetén $\alpha_{\nu n} \rightarrow$ folytonos gyökök, és $J_\nu(\alpha\rho)$ zárt rendszer

$$\int_0^\infty \rho J_\nu(\alpha\rho)J_\nu(\alpha'\rho)d\rho = \frac{1}{\alpha}\delta(\alpha-\alpha') \;\; ; \;\; \upsilon > -1/2 \tag{4.40}$$

4.5. Módosított Bessel-függvények

- Diffúziós-, vagy hullámegyenletek

$$\triangle\Psi - k^2\Psi = 0 \tag{4.41}$$

  hengerkoordinátákban való szeparációja után a radiális egyenlet

$$\rho^2\frac{d^2}{d\rho^2}R_\nu(k\rho) + \rho\frac{d}{d\rho}R_\nu(k\rho) + (-k^2\rho^2 - \upsilon^2)R_\nu(k\rho) = 0 \tag{4.42}$$

  Ez a $k \rightleftharpoons ik$ cserével átmegy a korábban tárgyalt Bessel-egyenletbe, a megoldások tehát a Bessel-függvények imaginárius argumentummal

$$\sim F_\upsilon(ix) \;\text{ ahol } F = J \;\text{ vagy }\; N \tag{4.43}$$

  Miután az így bevezetendő függvények olyan kapcsolatban vannak a Bessel-függvényekkel, mint a hiperbolikus függvények a trigonometrikusakkal, szokás őket hiperbolikus Bessel-függvényeknek is hívni.

- Origóban regulárisokra konvencionális választás

$$I_\nu(x) \doteq i^{-\nu} J_\nu(ix) = e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} J_\nu(e^{\frac{i\pi}{2}} x) \tag{4.44}$$

- Hatványsor (eredeti (4.1) sorból láthatóan a (-1)^s szorzófaktor kiesik)

$$I_{\pm\nu}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!(s \pm \nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s\pm\nu} \tag{4.45}$$

- Rekurzió a $J_\nu(x) = i^\nu I_\nu(-ix)$ visszaírással a korábbi rekurziókból pl.

$$I_{\upsilon-1}(x) - I_{\upsilon+1}(x) = \frac{2\upsilon}{x} I_\upsilon(x) \quad \text{és} \qquad I_{\upsilon-1}(x) + I_{\upsilon+1}(x) = 2I'_\upsilon(x) \tag{4.46}$$

- Egészekre sajnos újból

$$I_n(x) = I_{-n}(x) \tag{4.47}$$

igy szükséges lineárisan függetleneket találni helyettük. Ilyen pl. a Hankel-függvényekből

$$K_\upsilon(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\upsilon^{(1)}(ix) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} \left[J_\nu(ix) + iN_\nu(ix)\right] = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\upsilon}(x) - I_\upsilon(x)}{\sin(\upsilon\pi)} \tag{4.48}$$

Ezzel a választással $K_\upsilon(x)$ valós értékű (valós x-re).

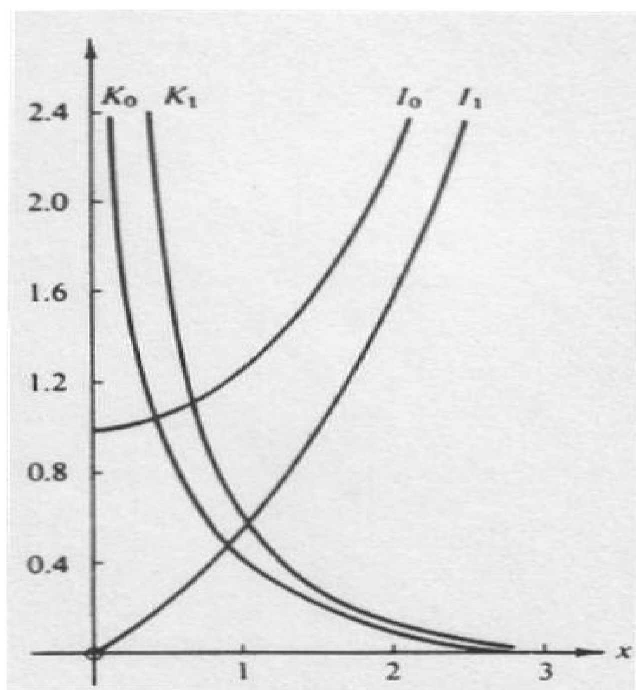


FIG. 11: Módosított Bessel-függvények

- Integrál-előállítás

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi cosh(x \cdot cos(\theta)) d\theta \tag{4.49}$$

$$K_0(x) = \int_0^\infty cos(x \cdot sinh(t)) dt \quad x > 0 \tag{4.50}$$

4.6. Gömbi (spherical) Bessel-függvény

A $\triangle\Psi + k^2\Psi = 0$ Helmholtz-egyenlet (r, ϑ, φ) gömbi koordinátákban való szeparációja után a radiális egyenlet alakja:

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} R + 2r \frac{d}{dr} R + (k^2 r^2 - n(n+1))R = 0 \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{4.51}$$

Ahogy a szögfüggő rész tárgyalásánál láttuk, az $n(n+1)$ a Legendre-egyenlet leválasztásakor keletkezett. Az egyenlet az $R(kr) = F(kr)/\sqrt{kr}$ helyettesítéssel Bessel-egyenletbe megy át

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} F + r \frac{d}{dr} F + (k^2 r^2 - (n+1/2)^2)F = 0 \qquad n = 0, 1, 2, ... \quad \text{amiből} \quad F = J_{n+\frac{1}{2}} \tag{4.52}$$

- Általában a Bessel-függvényeket elemi függvényekkel nem tudjuk megadni, az itt előkerülő félegész indexűeket azonban igen. Megmutatható, hogy

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left(A_n(x) \cdot cos(x) + B_n(x) \cdot sin(x)\right) \tag{4.53}$$

  ahol $A_n(x)$ es $B_n(x)$ $n-$edfokú racionális egész függvénye $1/x$-nek

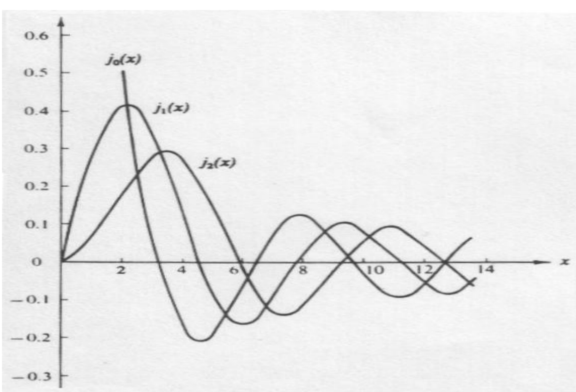
- Gömbi Bessel-függvénynek általában a

$$j_n(x) \doteq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(x) \quad , \quad n_n(x) \doteq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot N_{n+\frac{1}{2}}(x) \quad , \quad h_n^{(i)}(x) \doteq j_n(x) \pm i \cdot n_n(x) \quad i = 1, 2 \tag{4.54}$$

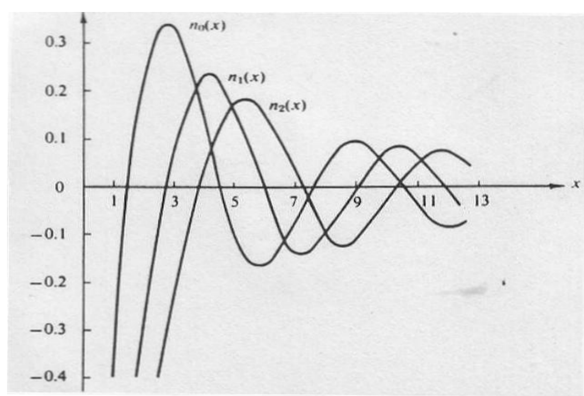
  definíciókkal adott függvényeket nevezzük.

- Példa

$$\begin{array}{lll} j_0(x) = \frac{sin(x)}{x} & n_0(x) = -\frac{cos(x)}{x} & h_0^{(1)}(x) = -\frac{i}{x} e^{ix} \\ j_1(x) = \frac{sin(x)}{x^2} - \frac{cos(x)}{x} & n_1(x) = -\frac{cos(x)}{x^2} - \frac{sin(x)}{x} & h_0^{(2)}(x) = \frac{i}{x} e^{-ix} \end{array} \tag{4.55}$$



Elsőfajú



Másodfajú

FIG. 12: Gömbi Bessel-függvények

- Kis argumentumokra, $x << 1$

$$j_n(x) \simeq \frac{x^n}{(2n+1)!!} \qquad , \qquad n_n(x) \simeq -\frac{(2n-1)!!}{x^{n+1}} \tag{4.56}$$

- Aszimptotikusan, $x \to \infty$ (pontosabban $x >> n(n+1)/2$)

$$j_n(x) \simeq \frac{1}{x} sin(x - \frac{n\pi}{2}) \quad , \quad n_n(x) \simeq -\frac{1}{x} cos(x - \frac{n\pi}{2}) \tag{4.57}$$

- Rekurzió $f_n = j_n$, n_n , $h_n^{(i)}$ bármelyikére

$$f_{n-1}(x) + f_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} f_n(x) \qquad \text{és} \qquad n f_{n-1}(x) - (n+1) f_{n+1}(x) = (2n+1)\, f_n'(x) \tag{4.58}$$

- Rayleigh-formula (indukcióval bizonyítható)

$$j_n(x) = (-1)^n \, x^n \left(\frac{d}{xdx}\right)^n \left(\frac{sin(x)}{x}\right) \tag{4.59}$$

$$n_n(x) = -\, (-1)^n \, x^n \left(\frac{d}{xdx}\right)^n \left(\frac{cos(x)}{x}\right) \tag{4.60}$$

- Ortogonalitás I (zéróhelyekre)

$$\int_0^a r^2 j_n(\alpha_{np} \frac{r}{a}) j_n(\alpha_{nq} \frac{r}{a}) dr = \frac{a^3}{2} \left[j_{n+1}(\alpha_{np}) \right]^2 \cdot \delta_{p,q} \;\; ; \;\; j_n(\alpha_{np}) = 0 \tag{4.61}$$

- Ortogonalitás II (indexre)

$$\int_{-\infty}^{\infty} j_n(x) j_m(x) dx = \frac{\pi}{2n+1} \cdot \delta_{m,n} \;\; ; \;\; m, n \geq= 0 \tag{4.62}$$

5. VÉGE