Óravázlatok a Matematikai Módszerek a Fizikában 2. előadásokhoz
I.rész: Disztribúcióelmélet

Bartha Ferenc*
Szegedi Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék
készültség: February 11, 2003
(http://www.jate.u-szeged.hu/˜barthaf/mm2.htm)

Contents

*Electronic address: `barthaf@physx.u-szeged.hu`

1. DISZTRIBÚCIÓ: VEKTORTÉREN ÉRTELMEZETT FOLYTONOS LINEÁRIS FUNKCIONÁL

1.1. Lináris funkcionál

Definíció 1 *Valamely V vektortér T* ***lineáris*** *leképezése a valós (most csak valós esettel foglalkozunk) számokra*

$$T : V \;\to \mathbb{R} \quad \textit{úgy, hogy} \;\; T[\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2] = \lambda_1 T[v_1] + \lambda_2 T[v_2] \;\; \forall v_i \in V, \; \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Megjegyzés 2 *A nullvektor képe:* $v + \sigma = v \implies T[\sigma] = 0$

Példa 3 *Lineáris és nemlineáris leképezések:*

vektor	*lineáris*	*nemlineáris*
$\mathbf{v} = (x_1, ..., x_n)$	$T[\mathbf{v}] = x_i$	$T[\mathbf{v}] = \max_i\{x_i\}$
$\varphi(x)$	$T[\varphi] = \varphi(x_0)$	$T[\varphi] = \max_x \varphi(x)$

1.2. Folytonosság

Disztribúciónak nevezzük a **folytonos** lineáris funkcionálokat.

Definíció 4 *T folytonos a $v \in V$ helyen, ha bármely*
a) $\mathbf{v}_n \to v$ *a V téren konvergens sorozatra teljesül, hogy* $T[\mathbf{v}_n] \to T[v]$
b) $\varepsilon > 0$ *valós számhoz van $v-$nek olyan $U^\varepsilon(v)$ környezete, hogy* $|T[w] - T[v]| < \varepsilon$ *ha* $w \in U^\varepsilon(v)$

Tétel 5 *Lineáris leképezések mindenhol folytonosak, ha valahol azok*

Tegyük fel, hogy T folytonos valamely v helyen, ekkor bármely $\bar{v}$-hoz az $U^\varepsilon(\bar{v}) := \{\bar{w} = w + \bar{v} - v | w \in U^\varepsilon(v)\}$ eltolt környezetre

$$|T[\bar{v}] - T[\bar{w}]| = |T[\bar{v}] - T[w + \bar{v} - v]| = |T[v] - T[w]| < \varepsilon$$

Köv.: Elegendő lesz a későbbiekben a folytonosságot csak a nullvektor környezetében vizsgálni.

---

[0] Ajánlott irodalom:
V. Sz. Vlagyimirov: Bevezetés a parciális differenciálegyenletek elméletébe, Bp. : Műszaki K., 1979
V. Sz. Vlagyimirov: Parciális differenciálegyenletek : feladatgyûjtemény, Bp. : Műszaki K., 1980
Gnädig P.: Bevezetés a disztribúcióelméletbe és fizikai alkalmazásaiba. Bp : 1979(KFKI), 1993
Jánossy L.., Gnädig P., Tasnádi P.: Vektorszámítás III., Bp : Tankönyvkiadó, 1980
W. Preuss: Disztribúcióelmélet műszaki alkalmazásokkal, Bp : Műszaki K, 1986
A.H. Zemanian: Distribution theory and transform analysis, McGraw-Hill Inc., 1965

Tétel 6 *T folytonos $\Longleftrightarrow$ a nullvektor valamely környezetében korlátos*

a) T folytonos $\Rightarrow \exists U^{\varepsilon}(\sigma) : |T[v]| < \varepsilon$ minden $v \in U^{\varepsilon}(\sigma)$, azaz $\pm\varepsilon$ felső/alsó korlát $U^{\varepsilon}(\sigma)$-on
b) T korlátos valamely $U(\sigma)$ környezetben $\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} : |T[v]| < M$ ha $v \in U(\sigma)$ Megfelel tehát az $U^{\varepsilon}(\sigma) = U(\sigma)\frac{\varepsilon}{M}$

Tétel 7 *(Normált tereken) T folytonos $\Longleftrightarrow$ korlátos az egységgömbön*

Megjegyzés 8 *egységgömb: $G = \{v \mid \|v\| = 1\}$*

Megjegyzés 9 $\|T\| = sup_{v\in G}|T[v]|$

1.3. Duális tér

$(T_1 + T_2)[v] \doteq T_1[v] + T_2[v]$ és $(\alpha T)[v] \doteq \alpha T[v]$ definíciókkal V^* duális tér: folytonos lineáris funkcionálok lineáris tere.

Megjegyzés 10 *Véges dimenziós vektorterekre igaz, hogy $dim(V^*) = dim(V)$*

2. K : A KORLÁTOS TARTÓJÚ TESZTFÜGGVÉNYEK TERE

2.1. Végtelen dimenziós függvénytér

$\varphi(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós függvények végtelen dimenziós lineáris tere

- $\varphi(x)$ korlátos tartójú: $supp(\varphi) \subset G_\varphi$ korlátos intervallum $\Rightarrow \varphi(x) = 0$ ha $x \notin G_\varphi$
- $\varphi(x)$ sima: $\varphi \in C^\infty$

Példa 11 *Van ilyen függvény, hiszen $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges esetén megfelel a*

$$\xi_\alpha(x) := \begin{cases} 0 & x > \alpha \\ exp(\frac{\alpha^2}{x^2-\alpha^2}) & x \le \alpha \end{cases} \tag{2.1}$$

Tétel 12 *Ha $g \in C^\infty$ és $\varphi \in K$, akkor $g\varphi \in K$*

Tétel 13 *Minden folytonos $f \in C^0$ és $f(x) = 0$ ha $x \notin [a, b]$ függvény egyenletesen közelíthető tesztfüggvénnyel: Minden $\epsilon > 0$-hoz létezik φ_ϵ úgy, hogy $|f(x) - \varphi_\epsilon(x)| < \varepsilon$ (egyenletesen, azaz x-től függetlenül)*

Legyen $\gamma_\alpha(x) = \frac{1}{T_\alpha}\xi_\alpha(x)$, ahol $T_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty}\xi_\alpha(x)dx$ (ekkor $\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_\alpha(x)dx = 1$ és $supp(\gamma_\alpha) = [-\alpha, \alpha]$)
Megfelelő lesz a $\varphi_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\gamma_\alpha(x-t)dt$ konvolúció, ugyanis
a) $f(x) = 0$ ha $x \notin [a, b] \;\Rightarrow\; \varphi_\alpha(x) = 0$ if $x \notin [a-\alpha, b+\alpha]$, azaz $\varphi_\alpha(x)$ korlátos tartójú
b) $\varphi_\alpha^{(1)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\gamma_\alpha^{(1)}(x-t)dt$ és $\gamma_\alpha^{(1)} \in K$ és így tovább miatt $\varphi_\alpha^{(n)}(x)$ létezik, azaz $\varphi_\alpha \in C^\infty$, tehát $\varphi_\alpha(x) \in K$
c) $|f(x) - \varphi_\alpha(x)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty}(f(x) - f(t))\gamma_\alpha(x-t)dt\right| \le \int_{a-\alpha}^{b+\alpha}|f(x) - f(t)|\gamma_\alpha(x-t)dt \le \varepsilon\int\gamma_\alpha(x-t)dt$ ha $\alpha < \alpha_\varepsilon$
(ugyanis $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$ ha $|x - t| < \alpha_\varepsilon$ minden x és t-re, mivel zárt intervallumon $f(x)$ egyenletesen folytonos)

Tétel 14 *Minden $f \in C^\infty$ sima függvényhez és minden $[a, b]$ intervallumhoz van $\varphi \in K$ úgy, hogy $f = \varphi|_{[a,b]}$*

Valamely $\alpha > 0$-hoz legyen a $h(x) \in C^0$ függvény olyan, hogy $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{,ha } x \in [a-\alpha, b+\alpha] \\ 0 & \text{,ha } x \notin I \text{ ahol } [a-\alpha, b+\alpha] \subset I \end{cases}$
Az előző tétel értelmében $\varphi_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\gamma_\alpha(x-t)dt$ tesztfüggvény, továbbá látható, hogy $x \in [a, b]$ esetben $\varphi_1(x) = \int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\gamma_\alpha(x-t)dt = 1$
Mivel $f \in C^\infty$, következik, hogy $f\varphi_1 \in K$ és nyilván $f\varphi_1 = f$ ha $x \in [a, b]$

2.2. Topológia: erős konvergencia

Definíció 15 *Egy* (φ_n) *függvénysorozat konvergens* K*-beli értelemben:* $\varphi_n \overset{K}{\to} \varphi$ *ha*
a) $\exists\, G$ ***közös*** *véges intervallum, hogy* $\varphi_n(x) = 0 \;:\; x \notin G$ *(*n*-től függetlenül)*
b) $\varphi_n^{(k)}(x) \to \varphi^{(k)}(x)$ *pontonként és* ***egyenletesen*** *minden* x*-re és* k*-ra*

Megjegyzés 16 *Egyenletes konvergencia:* $\varphi_n^{(k)}(x) \to 0 : \forall\varepsilon > 0$*-hoz* $\exists\, N_{\varepsilon,k}$ *hogy* $n > N_{\varepsilon,k} \Rightarrow \left|\varphi_n^{(k)}(x)\right| < \varepsilon$ *(*x*-től függetlenül)*

Megjegyzés 17 *A továbbiakban nem mindig jelöljük külön, ha a konvergenciát erős értelemben használjuk. Ha az összefüggésből nyilvánvaló, hogy* $\varphi_n \overset{K}{\to} \varphi$ *topológiáról van szó, akkor gyakran egyszerűen* $\varphi_n \to \varphi$ *-t írunk.*

Példa 18 *Konvergens:* $\varphi_n := \frac{1}{n}\xi_1(x) \overset{K}{\to} 0$

Példa 19 *Nem konvergens:* $\varphi_n := \frac{1}{n}\xi_n(x)$ *(egyenletesen konvergens, de nem létezik* $G \supset supp(\varphi_n)$ *)*

2.3. Többdimenziós alapterek

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;\; \mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$

- Létezik korlátos G tartomány, hogy $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ ha $\mathbf{x} \notin G$
- $D^{\mathbf{k}}\varphi(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{k_1+..+k_n}}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}}\varphi(x_1, ..., x_n)$ parciális deriváltak léteznek minden $\mathbf{k}$ =$(k_1, ..., k_n)$-re

Példa 20 *Tetszőleges* $\xi_\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \|\mathbf{x}\| > |\alpha| \\ exp(\frac{\alpha^2}{\|\mathbf{x}\|^2-\alpha^2}) & \|\mathbf{x}\| \le |\alpha| \end{cases}$ *megfelel.*

- egyenletes konvergencia: $\left|D^{\mathbf{k}}\varphi_\nu(\mathbf{x})\right| < \varepsilon$ minden $\nu > N_{\varepsilon,\mathbf{k}}$ függetlenül $\mathbf{x}$-től
- erős konvergencia: létezik közös G

3. DISZTRIBÚCIÓK A K TÉREN

Definíció 21 T_1 *és* T_2 K*-n értelmezett disztribúciók egyenlőek (azonosak) az* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *nyílt halmazon, ha*

$$T_1[\varphi] = T_2[\varphi] \qquad \forall\varphi : supp(\varphi) \subset \Omega \tag{3.1}$$

Tétel 22 *Minden* $f(x) \in L^1_{loc}$ *lokálisan integrálható függvény disztribúciót definiál, ahol*

$$T_f[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \tag{3.2}$$

Az $f(x) \in L^1_{loc}$ lokális integrálhatóság az jelenti, hogy $f(x)$ bármilyen korlátos tartományon (Lesbesgue) integrálható. Ekkor igaz, hogy $\int_I |f(x)|\,dx < M$ $(< \infty)$ minden véges I intervallumon. Mármost az iménti definíció az integrálás tulajdonságai miatt nyilván lineáris funkcionál, be kell még látnunk, hogy folytonos is. Valóban az, hiszen bármely $\varphi_n(x) \to 0$ alapsorozatra

$$|T_f[\varphi_n]| = \left|\int f(x)\varphi_n(x)dx\right| \le \int |f(x)|\,|\varphi_n(x)|\,dx \le \varepsilon \int_G |f(x)|\,dx \le \varepsilon M \;\; \text{ahol} \;\; supp(\varphi) \subset G$$

azaz $\varphi_n(x) \to 0 \;\Rightarrow\; |T_f[\varphi_n]| \to 0$

Megjegyzés 23 *Több dimenzióban hasonlóan*

$$T_f[\varphi] = \int ... \int f(x_1, ..., x_n)\varphi(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_n \tag{3.3}$$

Definíció 24 *A 'közönséges' függvényekkel az előbbiek szerint felírható disztribúciókat* ***REGULÁRIS*** *disztribúciónak nevezzük, az összes így fel nem írható folytonos lineaáris funkcionálok* ***SZINGULÁRIS*** *disztribúciók.*

Tétel 25 *A Dirac-delta a*

$$T_\delta[\varphi] = \varphi(0) \tag{3.4}$$

definícióval egy szinguláris disztribúció.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a hozzárendelés lineáris és folytonos. Vegyük észre, hogy utóbbi állításunkhoz elég az erős konvergencia helyett csupán az alaptéren előírt pontonkénti konvergencia is. Annak belátására, hogy a delta nem reguláris, tekintsük a következő függvényeket

$$\xi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(\frac{\alpha^2}{x^2-\alpha^2}) & \text{ha} \quad |x| < \alpha \\ 0 & \text{ha} \quad |x| \geq \alpha \end{cases}$$

melyekre a definíció szerint

$$T_\delta[\xi_\alpha] = e^{-1}$$

Ugyanakkor bármely $f \in L^1_{loc}$

$$|T_f[\xi_\alpha]| = \left| \int_{|x|<\alpha} f\xi_\alpha dx \right| \leq e^{-1} \int_{|x|<\alpha} |f|\, dx \to 0 \quad \text{miközben} \quad \alpha \to 0$$

Megjegyzés 26 *A jelölések egyszerűsítése végett (és történelmi okokból) a szinguláris disztribúciókra bevezetjük az '**általánosított függvény**', vagy '**szimbolikus függvény**' fogalmát és formálisan írjuk, hogy például*

$$T_\delta[\varphi] =' \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx' = \varphi(0) \tag{3.5}$$

ahol is a jobboldal definiálja a középre írt szimbolikus kifejezést. $\delta(x)$ tehát nem függvény abban az értelemben, hogy nem létezik egy olyan $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ leképezés, hogy $\delta(x) = y$ értékkészlet és értelmezési tartomány egymáshoz rendelése lenne.
Mégis néha úgy viselkedik bizonyos értelemben, mint egy 'normális' függvény (pl. most'integráljel mögött használva' az integrál értelmes). Továbbá a későbbiekben látjuk, hogy különböző olyan analízisbeli műveleteket (határátmenet, differenciálás, integrálás,...) elvégezhetünk a szinguláris disztribúciókkal is, melyeket a közönséges függvényekre értelmeztünk.
Ezen megjegyzések után nem habozunk néha olyat is leírni, hogy $\delta(x)$-függvény, ügyelve arra, hogy az így leírt kijelentéseink értelmessé tehetők legyenek a disztribúciók nyelvén.

Megjegyzés 27 *A fizikából vett motivációval és a jelölés egyszerűsítésére további jelölések*

$$T_f[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = < f(x)|\varphi(x) > = < f|\varphi > \tag{3.6}$$

mely egyúttal arra is utal, hogy egy bilineáris formával állunk szemben. A jobboldali zárójelet (ang.: bracket) gyakran szétszedjük és használjuk a disztribúciókra, mint $T_f : K \to \mathbb{R}$ leképezésekre a $T_f[.] \equiv < f|$ (olvasd: 'bra' vektor) és a tesztfüggvényekre a $\varphi \equiv |\varphi >$ (olvasd: 'ket' vektor) jelölést. Az $< f| \in K^*$ és $|\varphi > \in K$ bra és ket vektorok összetevése egy teljes zárójelet, a $T_f[\varphi] = < f|\varphi >$ (bracket-et) eredményezi.

Tétel 28 *Az alábbi hozzárendelés szinguláris disztribúció*

$$< P\frac{1}{x}|\varphi > = Pv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \tag{3.7}$$

ahol Pv az integrál Cauchy-főértékét jelenti.

A főérték a

$$Pv\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx=\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right\} \tag{3.8}$$

definícióval nyilván véges integrált ad minden tesztfüggvényre. Ezt leginkább abból láthatjuk, hogy megmutatjuk, hogy

$$< P\frac{1}{x}|\varphi>=\int_{-A}^{A}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx \quad supp(\varphi)\subset[-A,A] \tag{3.9}$$

Ugyanis

$$\left\{\int_{-A}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{A}\right\}\frac{\varphi(x)}{x}dx=\left\{\int_{-A}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{A}\right\}\frac{\varphi(x)}{x}dx-\varphi(0)\left\{\int_{-A}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{A}\right\}\frac{1}{x}dx$$

ahol a bővítésre felhasznált utolsó tag nulla minden véges ε-ra. Az integrálokat kombinálva

$$\left\{\int_{-A}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{A}\right\}\frac{\varphi(x)}{x}dx=\left\{\int_{-A}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{A}\right\}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx$$

és felhasználva, hogy tesztfüggvényekre

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\varphi'(0)$$

létezik és véges a Cauchy-főérték az alábbi közönséges integrálként is írható:

$$lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_{-A}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{A}\right\}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx=\int_{-A}^{A}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx$$

Megjegyzés 29 *Azokon a tesztfüggvényeken, melyekre igaz, hogy $\varphi(0)=0$, ez a szinguláris disztribúció megegyezik az '1/x' függvénnyel*

$$< P\frac{1}{x}|\varphi>=<\frac{1}{x}|\varphi> \quad ha \quad \varphi\in K_0=\{\varphi(0)=0|\varphi\in K\} \tag{3.10}$$

vagyis

$$< P\frac{1}{x}|\varphi>\overset{\Omega}{=}<\frac{1}{x}| \quad ahol\ \Omega=\mathbb{R}\backslash 0 \tag{3.11}$$

míg egyéb esetben a divergens $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx$ integrál egy 'végtelen elhagyásával' kapott regularizációja.

3.1. Műveletek disztribúciókkal

- K^* lineáris tér, mint a K duálisa triviálisan értelmezhető
- **eltolás:** Függvényeknek az a számmal eltoltját úgy szoktuk értelmezni, hogy

  $$\mathbf{S}^a\{f(x)\}=f(x-a)$$

  Reguláris disztribúciókra nyilván

  $$< f(x-a)|\varphi(x)>=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-a)\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\varphi(t+a)dt=< f(x)|\varphi(x+a)>$$

  ahonnan ötletet nyerve minden disztribúcióra definiáljuk az eltoltat a következő módon

  $$<\mathbf{S}^a f|\varphi)>\doteq< f|\mathbf{S}^{-a}\varphi)> \quad \text{vagy} \quad < f(x-a)|\varphi(x)>\doteq< f(x)|\varphi(x+a)> \tag{3.12}$$

  Egyszerűen megmutathatjuk, hogy ez a definíció értelmes, azaz $f\in K^*\Rightarrow\mathbf{S}^a f\in K^*$.

Példa 30 *Az eltolt Dirac-δ ezek szerint* $< \delta(x-a)|\varphi(x) >=< \delta(x)|\varphi(x+a) >$

- **inverzió:** Megint függvényekből és reguláris disztribúciókból kiindulva

$$< f(-x)|\varphi(x) >= \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)\varphi(x)dx = -\int_{\infty}^{-\infty} f(t)\varphi(-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(-t)dt =< f(x)|\varphi(-x) >$$

egyéb esetben pedig definícióként

$$< f(-x)|\varphi(x) > \doteq < f(x)|\varphi(-x) > \tag{3.13}$$

Beszélhetünk ezek után páros és páratlan disztribúciókról, attól függően, hogy

$$< f(-x)| = \pm < f(x)| \tag{3.14}$$

valamelyike teljesül-e.

Példa 31 *A Dirac-delta páros, szimbolikusan* $\delta(-x) = \delta(x)$

- **skálázás:** Minden $a > 0$ valós számra

$$< f(ax)|\varphi(x) >= \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)\varphi(x)dx = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(\frac{t}{a})dt = \frac{1}{a} < f(x)|\varphi(\frac{x}{a}) >$$

ahonnan

$$< f(ax)|\varphi(x) > \doteq \frac{1}{a} < f(x)|\varphi(\frac{x}{a}) > \tag{3.15}$$

továbbá $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ esetben

$$< f(a\mathbf{x})|\varphi(\mathbf{x}) > \doteq \left(\frac{1}{a}\right)^n < f(\mathbf{x})|\varphi(\frac{\mathbf{x}}{a}) > \tag{3.16}$$

- **lineáris koordináta-transzformációk:** csak egy változóra

$$< f(ax+b)|\varphi(x) > \doteq \frac{1}{|a|} < f(x)|\varphi(\frac{x-b}{a}) > \tag{3.17}$$

ahogyan az az előzőekből következik, hiszen negatív a-ra $a = -|a|$ és

$$< f(-|a|\,x)|\varphi(x) >=< f(|a|\,x)|\varphi(-x) >= \frac{1}{|a|} < f(x)|\varphi(-\frac{x}{|a|}) >= \frac{1}{|a|} < f(x)|\varphi(\frac{x}{a}) >$$

Példa 32 *Így tehát* $< \delta(ax+b)|\varphi(x) >= \frac{1}{|a|} < \delta(x)|\varphi(\frac{x-b}{a}) >= \frac{1}{|a|}\varphi(\frac{-b}{a})$

- **szorzat:** Jóllehet két függvény szorzatát minden további nélkül szoktuk értelmezni, **általánosított függvények szorzatát általában nem értelmezzük**. A nehézség onnan is látszik, hogy $f(x), g(x) \in L^1_{loc}$ két lokálisan integrálható függvényre nem következik, hogy szorzatuk is lokálisan integrálható lenne, azaz előfordulhat, hogy $f(x) \cdot g(x) \notin L^1_{loc}$

- **speciális szorzat:** bármely $g \in C^\infty$ és $< f| \in K^*$ esetén disztribúciót definiál a

$$< gf|\varphi > \doteq < f|g\varphi > \tag{3.18}$$

- **változó transzformációja:** függvényekre tudjuk, hogy például, ha

a) $f(x)$ folytonos, b) $g(x) \in C^\infty$, c) $\exists\ h(y) = g^{-1}(y)$ inverz és $h(y) \in C^\infty$ akkor

$$< f(g(x))|\varphi(x) >= \int_{-\infty}^{\infty} f(g(x))\varphi(x)dx = \int_{\infty}^{-\infty} f(t)\varphi(h(t))\,|h'(t)|\,dt$$

(Megjegyzés: ekkor $h'(t) = \pm|h'(t)|$ előjeltartó, hiszen $h(t)$ monoton) Így tehát jól viselkedő $g(x)$ transzformáció esetén értelmes definíció

$$< f(g(x))|\varphi(x) > \doteq < f|\Psi > \text{ ahol } \Psi(t) = \varphi(h(t))\,|h'(t)| \tag{3.19}$$

azaz $\Psi(t) \in K$ és $\varphi_n \to 0 \implies \Psi_n \to 0$

Példa 33 *Tegyük fel, hogy $g(x)$ egyetlen zéróhelye olyan, hogy $g(\tilde{x}) = 0$ de $\frac{d}{dx}g\big|_{x=\tilde{x}} = g'(\tilde{x}) \neq 0$. Ekkor $< \delta(g(x)|\varphi(x) > \doteq < \delta(t)\,|\varphi(h(t))\,|h'(t)| >= \varphi(g^{-1}(0)) \left|\frac{1}{g'(g^{-1}(0))}\right| = \frac{\varphi(\tilde{x})}{|g'(\tilde{x})|}$, mivel az inverz függvény deriváltjára $h'(t) = \frac{1}{g'(g^{-1}(t))}$*

Példa 34 *A Dirac-delta változóját ennél általánosabb transzformáció alá is vethetjük, ugyanis megmutatható, hogy a következő definíció értelmes: Ha $g(x)$ izolált $\{x_i\}$ zéróhelyei olyanok, hogy $g'(x_i) \neq 0$ akkor*

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|} \quad \textit{ahol } Z = \{x_i \mid g(x_i) = 0 \textit{ és } g'(x_i) \neq 0\} \tag{3.20}$$

(Formális, vázlatos indoklás:) Vegyük az

$$\{x_i\} \to \{I_i : x_i \in I_i\}$$

idegen intervallumokat, melyek mindegyike csak egyetlen zéróhelyet tartalmaz. Ekkor

$$\int \delta(g(x))\varphi(x)dx = \sum_i \int_{g(I_i)\uparrow} \delta(t)\varphi(g^{-1}(t)) \left|\frac{1}{g'(g^{-1}(t))}\right| dt = \sum_i \frac{\varphi(g^{-1}(0))}{|g'(g^{-1}(0))|}\bigg|_{I_i} = \sum_i \frac{\varphi(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

Példa 35 *Ilyen módon tehát $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}\{\delta(x-a) + \delta(x+a)\}$*

Megjegyzés 36 *Sajnálatos, de vannak olyan konstrukciók, melyeket megszoktunk a függvények körében, de általánosított függvényekre nem lehet definiálni. Így például **nincs** olyan, hogy $\delta(x^2)$, vagy $e^{\delta(x)}$, vagy akár $\delta^2(x)$.*

3.2. Disztribúciók differenciálása

Jól viselkedő függvényekre parciális integrálással

$$\int f'(x)\varphi(x)dt = -\int f(x)\varphi'(x)dt \tag{3.21}$$

innen vesszük a sejtést talán legfontosabb kijelentésünkhöz:

Tétel 37 ***Minden disztribúció végtelen sokszor differenciálható a derivált alábbi definíciója értelmében:***

$$< f^{(k)}|\varphi > \doteq (-1)^{(k)} < f|\varphi^{(k)} > \tag{3.22}$$

illetve

$$< \frac{\partial^{k_1+..+k_n}}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}} f|\varphi(x_1,...,x_n) >= (-1)^{k_1+..+k_n} < f|\frac{\partial^{k_1+..+k_n}}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}}\varphi > \tag{3.23}$$

Könnyen megmutathatjuk, hogy a duális tér zárt a deriválásra nézve, azaz $f \in K^* \Rightarrow f^{(k)} \in K^*$

Tétel 38 *Minden $f \in K^*$-ra igaz, hogy $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f$ (mindkét oldal létezik és **disztribúció-értelemben** egyenlőek)*

Példa 39 *A **Heaviside** reguláris disztribúció definíciója:*

$$< \Theta|\varphi >= \int_0^\infty \varphi(x)dx \tag{3.24}$$

Ami valóban reguláris, ugyanis a $\Theta(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ lokálisan integrálható 'egységugrás'-függvény(ek)hez tartozik. Ugyan függvény-értelemben tekinthetjük ezeket aszerint különbözőeknek, hogy $x = 0$-ban milyen értéket írunk elő, disztribúció-értelemben ezek mindegyike ugyanaz a disztribúció. Most számoljuk ki az abszolútérték-disztribúció deriváltját: $< |x|'\,|\varphi >= - < |x|\,|\varphi' >= +\int_{-\infty}^0 x\varphi'(x)dx - \int_0^\infty x\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^0 \varphi(x)dx + \int_0^\infty \varphi(x)dx =< \Theta(x) - \Theta(-x)|\varphi(x) >$ azaz disztribúció értelemben $|x|' = \Theta(x) - \Theta(-x)$

Példa 40 *Hasonlóan megmutathatjuk, hogy* $\Theta' = \delta$, *ugyanis* $< \Theta'|\varphi >= - < \Theta|\varphi' >= -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0)$

Példa 41 *Tegyük fel, hogy* $f(x)$ *olyan függvény, hogy izolált pontokban szakadásai vannak, azaz* $f(x) = h(x) + \sum \lambda_i \Theta(x_i)$ *és* $h'(x)$ *közönséges értelemben is létezik a szakadási helyek közötti intervallumokban, akkor*

$$f'(x) = h'(x) + \sum \lambda_i \delta(x - x_i)$$

Szemléltetésül legyen például $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi-x}{2} & x \in (0,\pi] \\ -\frac{\pi+x}{2} & x \in [-\pi, 0) \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ *és ez periodikusan ismételve (Valójában a függvény értéke az* $x = 0$ *pontban disztribúcióként érdektelen). Ekkor* $f'(x) = -\frac{1}{2} + \sum \pi\delta(x - 2n\pi)$

Példa 42 *Mutassuk meg, hogy* $(fg)' = f'g + g'f$ *valahányszor* fg *definiálható, mert pl.* $g \in C^\infty$

Példa 43 *Igazoljuk, hogy* $x\delta = 0$ *és az* $(x\delta)' = 0$ *segítségével számítsuk ki, hogy* $x\delta' = -\delta$ *és* $x^2\delta' = 0$

4. GYENGE KONVERGENCIA

Tétel 44 *(Schwartz) Ha a disztribúciók egy* (T_n) *sorozatára teljesül, hogy az* $a_n^\varphi = T_n[\varphi]$ *számok minden* $\varphi \in K$ *esetén konvergens* $a_n^\varphi \to a^\varphi$ *sorozatot adnak, akkor a* $T[\varphi] \doteq a^\varphi$ *módon értelmezett funkcionál disztribúció. Azt mondjuk ekkor, hogy a* (T_n) *sorozat gyengén konvergens, vagy* $T_n \to T$. *A duális tér zárt erre a konvergenciára.*

T nyilván lineáris funkcionál, csak a folytonosságot kell bizonyítanunk. Ehhez elég csak olyan alapsorozatokra, melyekre $\varphi_\nu \to 0$ megmutatni, hogy $T[\varphi_\nu] \to 0$. A bizonyítás hosszú, mellőzzük, de létezik, a tétel rendkívül fontos.

Definíció 45 *A* $\sum_{i=1}^{\infty} T_i[.]$ *sort konvergensnek mondjuk, ha a* $H_n[.] = \sum_n^{\infty} T_i[.]$ *sorozat gyengén konvergens*

Megjegyzés 46 *A konvergencia lineáris:* $af_n + bg_n \to af + bg$

Megjegyzés 47 *Nagyon sok, közönséges értelemben divergens sorozat/sor gyengén konvergens*

Megjegyzés 48 *Minden konvergens sor* ***tagonként differenciálható****.*

Megjegyzés 49 *A differenciálás folytonos lineáris művelet* K^* *felett, azaz* $T_n \to T \Rightarrow T_n^{(k)} \to T^{(k)}$

4.1. Konvergens sorozatok a duális téren

A duális téren való konvergencia **származhat** valamilyen függvénysosozat konvergenciájából. Például:

Tétel 50 *Indukált konvergencia: Legyen az* $f_n \in L^1_{loc}$ *függvénysorozat olyan, hogy*
i) $f_n(t) \to f(t)$ *pontonként, csaknem mindenütt*
ii) $|f_n(t)| < |g(t)| \qquad g \in L^1_{loc}$ *akkor*

$$f(t) \in L^1_{loc} \qquad \text{és} \qquad < f_n| \to < f|$$

A gyenge konvergencia azonban **különbözhet** a függvények konvergenciájától, sem nem szükséges, sem nem elégséges egy függvénysorozat konvergenciája a megfelelő gyenge konvergenciához. Példák:

Példa 51 *Legyen* $f_n(t) = \sin(nt)$, *ami függvényként nem konvergens (pontonként, kivéve a* $t = 0$ *helyet), mégis* $< sin(nt)| \to < 0|$ *Ugyanis*

$$< f_n|\varphi >= \int \sin(nt)\varphi(t)dt = \frac{1}{n}\int \cos(nt)\varphi'(t)dt$$

továbbá

$$\frac{1}{n}\left|\int \cos(nt)\varphi'(t)dt\right| \le \frac{1}{n}\int |\varphi'(t)|\,dt \le \frac{M}{n}$$

mivel $\varphi'(t) \in K$ *abszolút integrálható. Más oldalról közelítve: a* $\frac{\cos(nt)}{n}$ *függvénysorozat pontonként közönséges értelemben a nullához konvergál, disztribúció-értelemben is. A derivált sorozat azonban függvényként nem konvergens, de disztribúcióként továbbra is az, sőt a határátmenet felcserélhető a deriválással. Hasonlóan:* $\frac{sin(nt)}{n}$ *függvénysorozatként nullához tart, reguláris disztribúcióként is. A sorozat tagonkénti deriváltja,* $cos(nt)$ *divergens függvényként, konvergens disztribúcióként.*

Példa 52 *Nézzük most a pontonként konvergens* $f_n(t) = \begin{cases} \frac{n}{2} & |t| \le \frac{1}{n} \\ 0 & |t| > \frac{1}{n} \end{cases}$ *függvénysorozatot. Látjuk, hogy* $f_n(t) \to 0$ *kivéve a* $t = 0$ *pontot. Ugyanakkor* $< f_n| \to < \delta|$ *, hiszen*

$$< f_n|\varphi >= \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} \varphi(t)dt \to \varphi(0)$$

Példa 53 *Pontonként konvergens az* $f_n(t) = \begin{cases} n^2 & |t| \le \frac{1}{n} \\ 0 & |t| > \frac{1}{n} \end{cases}$ *és* $f_n(t) \to 0$ *a* $t = 0$ *kivételével, mégis* $< f_n|$ *nem konvergens gyenge értelemben, kivéve* K *azon alterét, melyben* $\varphi(0) = 0$.

Példa 54 *A gyenge konvergencia és a disztribúciók közötti nehézkes szorzás esetlegességére álljon itt egy 'fizika' példa. Az* R *ellenálláson átfolyó* $I(t)$ *áram mellett* $U(t) = RI(t)$ *feszültség van. A munka* $W = \int I(t)U(t)dt$. *Legyen most*

$$I_n(t) = \begin{cases} n^{3/5} & 0 \le t \le \frac{1}{n} \\ 0 & \textit{egyébként} \end{cases}$$

Az ellenálláson átfolyt töltés mennyisége

$$Q_n = \int I_n(t)dt = n^{-2/5} \to 0 \qquad \textit{miközben} \qquad n \to \infty$$

ugyanakkor a végzett munka

$$W_n = \int I_n(t)U_n(t)dt = n^{6/5} \int_0^{1/n} dt = n^{1/5} \to \infty$$

márpedig kár lenne végtelen nagy munkával semennyi töltést átpumpálni. A probléma feloldása, hogy a disztribúciók szorzata nem mindig definiálható (jelen esetben igen), de még, ha értelmesen definiálható is a szorzat, a konvergencia nem mindig cserélhető fel a szorzással.

4.2. Dirac-delta és a gyenge konvergencia

Függvénysorozatokat fogunk megadni, melyek reguláris disztribúcióként a szinguláris delta disztribúcióhoz tartanak.

Tétel 55 $(f_n(t))$ *lokálisan integrálható függvények* $t \in \mathbb{R}^k$ *. Ha*
i) minden n *és* $T > 0$ *számokra a sorozat egyenletesen korlátos :* $\int_{|t|<T} |f_n(t)|\, dt < M (\ne M_n$, *n-től független korlát)*
ii) minden $|t| \in \left[\tau, \frac{1}{\tau}\right] < \infty$ *korlátos tartományon* $f_n(t) \to 0$ *egyenletesen*
iii) továbbá $\lim_{n\to\infty} \int_{|t|<\tau} f_n(t)dt \to 1$ *bármilyen véges* $\tau > 0$*-ra* ***akkor*** $< f_n| \to < \delta|$

Bizonyítás:

$$\int_{\Re^n} f_n(t)\varphi(t)dt = \int_{|t|<\eta} f_n(t)\varphi(t)dt + \int_{|t|>\eta} f_n(t)\varphi(t)dt$$

De $\varphi(t) = 0$ ha $|t| > G$ (tesztfüggvény, korlátos tartó)

$$\int_{|t|>\eta} f_n(t)\varphi(t)dt = \int_{G>|t|>\eta} f_n(t)\varphi(t)dt \to 0$$

ahol kihasználtuk, hogy van τ : $[\eta, G] \subset [\tau, 1/\tau]$ és $f_n(t) \to 0$ egyenletesen ilyen intervallumokon. Az első tagra írhatjuk, hogy

$$\int_{|t|<\eta} f_n(t)\varphi(t)dt = \int_{|t|<\eta} f_n(t)\left\{\varphi(t) - \varphi(0)\right\}dt + \varphi(0)\int_{|t|<\eta} f_n(t)dt$$

A második integrál 1-hez tart, az első pedig nullához, mert

$$\left|\int_{|t|<\eta} f_n(t)\left\{\varphi(t) - \varphi(0)\right\}dt\right| \leq \int_{|t|<\eta} |f_n(t)|\,|\varphi(t) - \varphi(0)|\,dt \leq \eta\tilde{M}\int_{|t|<\eta} |f_n(t)|\,dt \tag{4.1}$$

ahol használtuk, hogy $|\varphi(t) - \varphi(0)| \leq |t|\,\tilde{M}$ (mert φ minden parciális deriváltja folytonos és $\tilde{M}$ választható minden η-hoz, mint pl. 1 dimenzióban

$$|\varphi(t) - \varphi(0)| = \left|\int_0^t \varphi'(s)ds\right| \leq sup_{s\in[0,t]}\left\{\varphi'(s)\right\}\left|\int_0^t ds\right|$$

és több dimenzióban hasonlóan). Végül vegyük észre, hogy (4.1)-ben az utolsó integrál korlátos.

Következmény 56 *Legyen* $h(t)$ *abszolút integrálható,* $t \in \mathbb{R}^k$ *és* $\int h(t)dt = 1$ *valamint* $|t|\,h(t) \to 0$ $\quad |t| \to \infty$. *Ekkor*

$$f_n(t) \doteq nh(nt) \quad \textit{olyan, hogy} \quad < f_n| \to < \delta|$$

Példa 57 *Az alábbi sorozatok, mint reguláris disztribúciók a Dirac-deltához tartanak, miközben* $\nu \to \infty$

$$\frac{\upsilon}{\sqrt{\pi}}e^{-\upsilon^2 t^2} \qquad \frac{\upsilon}{2}e^{-\upsilon|t|} \qquad \frac{\upsilon}{\pi(1+\upsilon^2 t^2)}$$

$$\frac{sin(\upsilon t)}{\pi t} \qquad \frac{1-cos(\upsilon t)}{\upsilon\pi t^2} \qquad \frac{sin^2(\upsilon t)}{\pi\upsilon t^2}$$

$$\frac{\upsilon}{2}\left\{\theta(\upsilon t - 1) - \theta(\upsilon t + 1)\right\}$$

Megjegyzés 58 *Az utolsó sorozatot más alakban is szokás felírni, például felhasználva, hogy* $\theta(t - 1/\upsilon) = \theta(\upsilon t - 1)$.

Megjegyzés 59 *Figyeljük meg, hogy a divergens* $\lim\limits_{\nu\to\infty}\int_0^\nu \frac{cos(\omega t)}{\pi}d\omega$ *integrál disztribúció-értelemben létezik és* $\lim\limits_{\nu\to\infty}\int_0^\nu \frac{cos(\omega t)}{\pi}d\omega = \lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{sin(\upsilon t)}{\pi t} = \delta(t)$.

Megjegyzés 60 *Az előző megjegyzés alapján*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dx = 2\lim_{\nu\to\infty}\int_0^\nu cos(kx)dx = 2\pi\delta(k)$$

*amit felhasználhatunk az úgynevezett '**deltára-normálás**hoz'. Ugyanis a közönséges értelemben nem normálható*

$$\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$$

komplex függvények belső szorzatára formálisan igaz, hogy

$$(\phi_{k'}(x), \phi_k(x)) \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\phi_{k'}^*(x)\phi_k(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(k-k')x}dx = \delta(k-k')$$

Megjegyzés 61 *A delta egyéb 'előállításai' gyakran kapcsolatosak gyengén konvergens függvénysorokkal. Ezek általában egy ortogonális függvényrendszer 'teljességét' fejezik ki. Az $L_n(x)$ ortonormált függvényrendszer teljessége azt jelenti, hogy elegendően jól viselkedő φ (teszt)függvényekre*

$$\sum_n^{\infty} a_n L_n(x) = \varphi(x) \quad ha \quad a_n = \int_{-\infty}^{\infty} L_n(x')\,\varphi(x')dx'$$

Formális átírással

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_n^{\infty} L_n(x)\,L_n(x')\right)\varphi(x')dx' = \varphi(x)$$

*a függvényrendszer **teljessége** a*

$$\sum_n^{\infty} L_n(x)\,L_n(x') = \delta(x-x')$$

alakba sűríthető. Ez egyúttal tekinthető úgy is, mint a $\delta(x-x')$ egy sorral való előállítása. Ha általánosabb kontinuum bázis teljességét akarjuk kifejezni, akkor például az előbb említett $\phi_k(x)$ síkhullámokra írhatjuk, hogy

$$\int \phi_k^*(x)\phi_k(x')\;dk = \delta(x-x')$$

4.3. Simítás: disztribúciók közelítése C^{∞} reguláris sorozattal

Legyen a $\rho(\mathbf{x}) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^k)$ egy nemnegatív, normált, gömbszimmetrikus függvény olyan, hogy tartója belül van az egységgömbbön:

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho(\|\mathbf{x}\|) \quad , \quad \rho(\mathbf{x}) : \begin{cases} \geq 0 & \|\mathbf{x}\| < 1 \\ = 0 & \|\mathbf{x}\| \geq 1 \end{cases} \quad , \quad \int \rho(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1 \tag{4.2}$$

Bármely $\varepsilon > 0$ valós számra minden $\mathbf{y}$ mellett

$$\rho_{\mathbf{y},\varepsilon}(\mathbf{x}) \doteq \frac{1}{\varepsilon^k}\rho(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\varepsilon}) \tag{4.3}$$

tesztfüggvény. Tetszőleges disztribúcióra az

$$f^{\varepsilon}(\mathbf{y}) \doteq < f(\mathbf{x})|\rho_{\mathbf{y},\varepsilon}(\mathbf{x}) > \tag{4.4}$$

függvény az $< f|$ egy ε méretű tartományra vett $C^{\infty}(\mathbb{R}^k)$ simítása.

Tétel 62 *A megfelelő disztribúciókra ekkor igaz, hogy*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \; < f^{\varepsilon}| = < f| \tag{4.5}$$

Tétel 63 *A simítás a duális téren folytonos művelet, azaz* $< f_n| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} < f| \qquad \Longrightarrow \qquad < f_n^{\varepsilon}| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} < f^{\varepsilon}|$

Tétel 64 *A simítás és a differenciálás felcserélhető, azaz* $< (f')^{\varepsilon}| = < (f^{\varepsilon})'|$

Megjegyzés 65 *Valójában a simítás a disztribúciók közötti **konvolúció** egy speciális esete*

$$f^{\varepsilon} = f * \rho_{\varepsilon} \quad vagy\ szimbolikusan \quad f^{\varepsilon}(y) = \int f(x)\frac{1}{\varepsilon^k}\rho(\frac{x-y}{\varepsilon})dx$$

A konvolúcióval később foglalkozunk.

Példa 66 *A Dirac- δ a tételnek megfelelő*

$$\delta^{\varepsilon}(y) \doteq < \delta|\rho_{y,\varepsilon} > = \frac{1}{\varepsilon^k}\rho(\frac{y}{\varepsilon})$$

simítása mellett a tartóra tett kikötés nélkül is készíthetünk a deltához tartó sima reguláris sorozatokat. Ilyenek voltak a $\upsilon \leftrightarrow 1/\varepsilon$ cserével látható módon például

$$\frac{1-cos(\upsilon t)}{\upsilon\pi t^2} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{1-cos(\frac{t}{\varepsilon})}{\pi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2} \qquad és \quad \frac{\upsilon}{\sqrt{\pi}}e^{-\upsilon^2 t^2} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2} \tag{4.6}$$

4.4. Egy példa a potenciálok elméletéből

A $\triangle\Phi(\mathbf{r}) = \lambda\rho(\mathbf{r})$ Poisson-egyenlet tárgyalásakor találkozhatunk a

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}) \quad \text{vagy} \quad \nabla^2_{\mathbf{r}} \frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{4.7}$$

egyenletekkel. Az előbbi forma 'szemléletesen' szokott előkerülni, mikor a folytonos $\rho(\mathbf{r})$ tömeg-, vagy töltéseloszlás helyett tömegpontokra vagy ponttöltésekre is fenn akarjuk tartani a Poisson-egyenletet. Az utóbbi alakot írjuk fel, ha például a Poisson-egyenlet 'Green-függvényéről' beszélünk. Most megmutatjuk, hogy az egyenletek korrektek disztribúció értelemben. Tekintsük ugyanis az

$$f_\epsilon(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1/r & r > \varepsilon \\ g_\varepsilon(\mathbf{r}) & r \le \varepsilon \end{cases}$$

függvényt, ahol $g_\varepsilon(\mathbf{r})$ egy tetszőleges sima függvény, úgy, hogy folytonosan differenciálhatóan illeszkedik $r = \varepsilon$-ban az $1/r$ folytatáshoz:

$$g(\varepsilon) = 1/\varepsilon \quad \text{és} \quad \nabla g(\mathbf{r})|_{r=\varepsilon} = \nabla \frac{1}{r}\Big|_{r=\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\epsilon(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \quad \Longrightarrow \text{gyenge értelemben } \lim_{\varepsilon\to 0} \nabla^2 f_\epsilon(\mathbf{r}) = \nabla^2 \frac{1}{r}$$

Tetszőleges tesztfüggvényre tehát

$$< \nabla^2 \frac{1}{r}|\varphi >= \lim_{\varepsilon\to 0} \int \varphi(\mathbf{r})\nabla^2 f_\epsilon(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{G_\varepsilon} \varphi(\mathbf{r})\nabla^2 g_\epsilon(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

ahol G_ε az ε sugarú gömbtartományt jelöli (ugyanis $\nabla^2 1/r = 0$ ha $r > \varepsilon$). Mármost a gömbtartomány valamely $\tilde{\mathbf{r}}$ belső pontjára

$$\int_{G_\varepsilon} \varphi(\mathbf{r})\nabla^2 g_\epsilon(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \varphi(\tilde{\mathbf{r}}) \int_{G_\varepsilon} \nabla^2 g_\epsilon(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad \text{ahol} \quad \tilde{\mathbf{r}} \in G_\varepsilon$$

Az utóbbi térfogati integrált a Gauss-tétellel felületi integrállá alakítjuk

$$\int_{G_\varepsilon} \nabla^2 g_\epsilon(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{F_\varepsilon} \nabla g(\mathbf{r}) d\mathbf{F} = -\frac{1}{\varepsilon^2} F_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi\varepsilon^2 = -4\pi$$

Így tehát

$$< \nabla^2 \frac{1}{r}|\varphi >= -4\pi \lim_{\varepsilon\to 0} \varphi(\tilde{\mathbf{r}}) = -4\pi\varphi(\mathbf{0}) = -4\pi < \delta(\mathbf{r})|\varphi >$$

amivel a (4.7) képletet igazoltuk.

5. VEGYES KÉRDÉSEK

5.1. Disztribúció nulltere és tartója

Definíció 67 *Egy $< f|$ disztribúció nulltere az az Ω_0 nyílt halmaz, ahol*

$$< f| \overset{\Omega_0}{=} < 0| \tag{5.1}$$

vagyis emlékezve a disztribúciók nyílt halmazokon vett egyenlőségének fogalmára:

$$< f|\varphi >= 0 \quad \forall\varphi : supp(\varphi) \subset \Omega_0 \tag{5.2}$$

Definíció 68 *A disztribúció tartója a nullterének a komplementere (zárt halmaz)*

$$supp(f) = \bar{\Omega}_0 \tag{5.3}$$

Megjegyzés 69 *Nincs értelme arról beszélni, hogy egy általánosított függvénynek mi az 'értéke' egy pontban. Nyílt halmazokon azonban össze lehet hasonlítani disztribúciókat, és például mondhatjuk, hogy $< f|$ kisebb, mint $< g|$ az Ω halmazon, ha $< f|\varphi >$ kisebb, mint $< g|\varphi >$ minden* ***pozitív*** *φ-re, melyek tartója $\Omega-$ban van.*

Példa 70 *Néhány korábban megismert disztribúcióra*

$$\begin{aligned} supp(\delta_a^{(n)}) &= a && (5.4)\\ supp(|x|) &= \mathbb{R}^n && (5.5)\\ supp(P\frac{1}{x}) &= \mathbb{R} && (5.6) \end{aligned}$$

Tétel 71 *Csak a delta és deriváltjai egy pontra koncentráltak:*

$$supp(f) = a \;\Leftrightarrow\; f = \sum c_i \delta^{(i)}(x-a) \tag{5.7}$$

5.2. A $g(x)f(x) = 0$ egyenlet megoldásairól

Tétel 72 *Az $x^m f(x) = 0$ egyenlet egyetlen megoldásai*

$$x^m f(x) = 0 \iff f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i \delta^{(i)}(x) \tag{5.8}$$

ahol c_i tetszőleges konstansok.

a) $f(x)$ megoldása egyenletnek, ha $i < m$ esetén $< x^m\delta^{(i)}|\varphi >= 0$. Ez viszont igaz, ugyanis

$$< x^m\delta^{(i)}|\varphi >=< \delta^{(i)}|x^m\varphi >= (-1)^i < \delta|\left(x^m\varphi\right)^{(i)} >= (-1)^i \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \frac{m!}{(m-k)!} < \delta|x^{m-k}\varphi^{(i-k)} >$$

és $m - k > 0$ az összeg minden tagjában
b) Az egyértelműség bizonyításához bontsuk fel a tetszőleges $\varphi(x)$ tesztfüggvényt a

$$\varphi(x) = \lambda(x) \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{i!}\varphi^{(i)}(0)x^i + \chi(x)$$

módon. Bármely adott $\lambda(x) \in K$ mellett ez a felbontás egyértelmű és rögzíti a $\chi(x) \in K$ függvényt

Lemma 73 $\chi(x) = x^m\psi(x)$, $\psi(x) \in K$ *alakú* $\iff \lambda(x) : \lambda(0) = 1$ *és* $\lambda^{(i)}(0) = 0$, $i = 1, .., m$

Nyilvánvaló, hogy

$$\psi(x) = \frac{\chi(x)}{x^m} \qquad x \neq 0$$

C^∞ és korlátos tartójú. Csak $\psi(0)$ definícióját kell gondosan megválasztanunk a sima kiterjesztéshez. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\chi^{(i)}(0) = 0$, ha $0 < i < m$, így a l'Hospital-szabály használatával

$$\lim_{x\to 0} \frac{\chi(x)}{x^m} = \frac{\chi^{(m)}(0)}{m!}$$

A

$$\psi(0) \doteq \frac{\chi^{(m)}(0)}{m!}$$

választás ψ-t folytonossá teszi az origóban, továbbá megmutatható, hogy

$$\psi'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\psi(x)-\psi(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\chi(x) - \frac{x^m\chi^{(m)}(0)}{m!}}{x^{m+1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\chi^{(m)}(x)-\chi^{(m)}(0)}{(m+1)!\,x} = \frac{\chi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}$$

és így tovább, azaz minden deriváltja is létezik. Q.e.d.
A Lemma használatával ekkor

$$< f|\varphi >= \sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{i!}\varphi^{(i)}(0) < f|\lambda(x)x^i > + < f|\chi >$$
$$< f|\chi >=< f|x^m\psi(x) >=< x^m f|\psi(x) >= 0$$

és így

$$< f|\varphi >= \sum_{i=0}^{m-1} c_i(-1)^i\varphi^{(i)}(0) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i < \delta^{(i)}|\varphi > \text{ ahol } c_i \doteq \frac{(-1)^i}{i!} < f|\lambda(x)x^i >$$

Következmény 74 *Tekintsük a $g(x) \in C^\infty$ függvényt, amire*

$$g(0) = 0 \text{ és } g(x) \neq 0 \text{ ha } x \neq 0 \text{ valamint } \lim_{|x|\to 0}\left|\frac{g(x)}{x^m}\right| \neq 0 \text{ (véges)}$$

Az alábbi 'homogén' egyenlet megoldásaira

$$g(x)f(x) = 0 \iff f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i\delta^{(i)}(x)$$

Megjegyzés 75 *Inhomogén egyenletekkel óvatosan bánjunk, nehogy elfeledjük a homogén megoldást. Így például*

$$xf(x) = 1 \Longrightarrow f(x) = P\frac{1}{x} + c\delta(x)$$

5.3. Regularizáció

Probléma: Tekintsük az $f(x)$ függvényt, aminek nem integrálható szingularitása van x_0-ban. (Mint például $1/x$) A *regularizáció* során olyan disztribúciót állítunk elő, hogy

$$< f|\varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

minden olyan tesztfüggvényen, melyek tartója nem tartalmazza az x_0 pontot, majd alkalmasan kiterjesztjük ezt a funkcionált az egész K-ra.

Egy megoldás: Legyen $x_0 = 0$ és tegyük fel, hogy a szingularitás *algebrai*, azaz valamely m egészre $x^m f(x)$ lokálisan integrálható a szingularitás környezetében. Ekkor az egész K-ra definiáljuk f-et a következő módon:

$$< f|\varphi >= \int_{|x|>a} f(x)\varphi(x)dx + \int_{|x|<a} f(x)\left\{\varphi(x) - \sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{i!}\varphi^{(i)}(0)x^i\right\}dx \tag{5.9}$$

valamely (bármely) $a > 0$ választással. Vegyük észre, hogy az előző Lemma szerint a $\lambda(x) \equiv 1$ ha $|x| < a$ speciális esetre

$$\varphi(x) - \sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{i!}\varphi^{(i)}(0)x^i = x^m\psi \quad \text{ha} \quad |x| < a$$

és $\psi \in K$, így a definíció értelmes, valóban véges értéket ad minden tesztfüggvényre. Ha φ tartójában nincs benne a szingularitás, akkor pedig $\varphi^{(n)}(0) = 0$ és a második tag eltűnik.

Egyértelműség: Az egyik regularizációból másikat készíthetünk pusztán azzal, hogy a szingularitásra koncentrált bármilyen

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \delta^{(i)}(x)$$

disztribúciót hozzáadjuk. Bizonyos regularizációkat előnyben részesítjük, ezeket *kanonikus* regularizációnak hívjuk. Az ilyen regularizációk jellemzője, hogy

$$(f+g)_{reg} = f_{reg} + g_{reg} \tag{5.10}$$

$$(gf)_{reg} = g \cdot f_{reg} \text{ ha } g \in C^\infty \tag{5.11}$$

$$(f)'_{reg} = (f')_{reg} \text{ ha } f' \text{ regularizálható} \tag{5.12}$$

Példa 76 *Egy ilyen szokásos regularizáció az* $F\frac{1_+}{x}$ *pszeudo-függvény:*

$$< F\frac{1_+}{x}|\varphi >= Fp\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x} \doteq \int_0^A \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx + \varphi(0)Log(A) \quad supp(\varphi) \subset [-A, A]$$

ahol az általában divergens integrál Hadamard-féle véges részét vettük. Megjegyezzük, hogy a definícióban szereplő A-tól független a disztribúció értéke.

5.4. Integrálás

Tétel 77 *Minden disztribúciónak van primitív 'függvénye' (állandó erejéig határozott)*

A nyilvánvalónak tűnő

$$< f^{(-1)}|\psi^{(1)} > \doteq - < f|\psi > \tag{5.13}$$

definíció nem elégséges, ugyanis ezzel $f^{(-1)}$ csak egy $K^{(1)} \subset K$ altéren adott. $K^{(1)}$ olyan (teszt)függvényeket tartalmaz, amik tesztfüggvények deriváltjaként írhatók fel. Ki kell terjesztenünk ezt a definíciót a teljes K térre. Válasszunk ehhez egy **rögzített** $\varphi_0 \in K$ de $\varphi_0 \notin K^{(1)}$ tesztfüggvényt. Az ilyen tesztfüggvények normálhatók, válasszuk normáltnak

$$\int \varphi_0(t)dt = 1$$

Minden $\varphi \in K$ egyértelműen felbontható

$$\varphi = k\varphi_0 + \psi^{(1)} \tag{5.14}$$

alakba

$$\psi(x) = \int^x (\varphi - k\varphi_0) \quad \in K \quad \Longleftrightarrow \quad \int (\varphi - k\varphi_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = \int \varphi(t)dt$$

A funkcionál linearitását kihasználva

$$< f^{(-1)}|\varphi >= k < f^{(-1)}|\varphi_0 > + < f^{(-1)}|\psi^{(1)} > \tag{5.15}$$

ahol jobboldal első tagja egy konstans funkcionál

$$k < f^{(-1)}|\varphi_0 >= C\int \varphi(t)dt =< C|\varphi >$$

(a rögzített φ_0-ra előírt tetszőleges C értéknek megfelelően), a második tagra pedig használjuk a kívánkozó (5.13) definíciót. Összefoglalva

$$< f^{(-1)}|\varphi > \doteq < C|\varphi > - < f|\psi > \quad \text{ahol} \quad \varphi = k\varphi_0 + \psi^{(1)} \tag{5.16}$$

Az így definiált primitív függvény disztribúció, folytonosságának bizonyításához tekintsünk egy alapsorozatot, amire

$$\varphi_n = k_n\varphi_0 + \psi_n^{(1)} \quad \to \quad 0$$

Akkor viszont

$$\varphi_n(x) \to 0 \quad \Longrightarrow \quad k_n \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \psi_n^{(1)}(x) \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \psi_n(x) \to 0$$

hiszen

$$k_n = \int \varphi_n(t)dt \quad \text{és} \quad \psi_n(x) = \int^x \psi_n^{(1)}(t)dt$$

Következik, hogy

$$< f^{(-1)}|\varphi_n >= k_n < f^{(-1)}|\varphi_0 > - < f|\psi_n > \quad \to \quad 0 \tag{5.17}$$

az első tag azért, mert $k_n \to 0$, a második pedig f folytonossága miatt.

Tétel 78 *A differenciálás az integrálás inverze:* $\frac{d}{dx}\int^x f = f$

Bizonyítás: $< \left(f^{(-1)}\right)^{(1)}|\varphi >= - < f^{(-1)}|\varphi^{(1)} >=< f|\varphi >$ A fordított állítás az lenne, hogy $\left(f^{(1)}\right)^{(-1)} = f + C$, vagy pontosabban

Tétel 79 *A primitív függvények konstans erejéig ekvivalensek:* $f_a^{(-1)} = f_b^{(-1)} + c$

Két különböző választás

$$\begin{array}{lll} < f_a^{(-1)}|\varphi >=< C_a|\varphi > - < f|\psi_a > & \varphi = k\varphi_{0a} + \psi_a^{(1)} & < f_a^{(-1)}|\varphi_{0a} >\doteq C_a \\ < f_b^{(-1)}|\varphi >=< C_b|\varphi > - < f|\psi_b > & \varphi = k\varphi_{0b} + \psi_b^{(1)} & < f_b^{(-1)}|\varphi_{0b} >\doteq C_b \end{array}$$

mellett

$$< f_a^{(-1)} - f_b^{(-1)}|\varphi >=< C_a - C_b|\varphi > - < f|\psi_a - \psi_b >$$

De

$$< f|\psi_a - \psi_b >= k < f|\int^x \{\varphi_{0a} - \varphi_{0b}\}\, dt >= kC_{ab} =< C_{ab}|\varphi >$$

ahol C_{ab} független φ-től, így

$$< f_a^{(-1)} - f_b^{(-1)}|\varphi >=< C|\varphi > ,\ C = C_a - C_b - C_{ab}$$

Példa 80 *A Delta primitív függvénye a Heaviside-függvény:* $\delta^{(-1)} = \Theta + c$

$$< \delta^{(-1)}|\varphi >=< c|\varphi > - < \delta|\psi >=< C|\varphi > -\psi(0)$$

de

$$\psi(0) = \int_{-\infty}^0 \psi^{(1)} = \int_{-\infty}^0 (\varphi - k\varphi_0) = \int_{-\infty}^\infty [1-\Theta]\,\varphi - \int_{-\infty}^\infty \varphi \cdot \int_{-\infty}^0 \varphi_0 = \int_{-\infty}^\infty [a-\Theta]\,\varphi dt$$

ahol

$$a = 1 - \int_{-\infty}^0 \varphi_0$$

így

$$< \delta^{(-1)}|\varphi >=< c|\varphi > + < \Theta|\psi >$$

Megjegyzés 81 *Magasabb rendű primitív függvények hasonlóan bevezethetők, igaz lesz, hogy ezekre*

$$f_a^{(-n)} - f_b^{(-n)} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \tag{5.18}$$

Megjegyzés 82 *Parciális integrálás: például $g(x) \in C^\infty$ mellett értelmes*

$$\left(gf^{(1)}\right)^{(-1)} = gf - \left(g^{(1)}f\right)^{(-1)} + c \tag{5.19}$$

Megjegyzés 83 *Határozott integrálról beszélhetünk, ha f korlátos tartójú. Ekkor*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \doteq < f|\lambda > \tag{5.20}$$

értelmes, ha $\lambda(t) \in K$ olyan tesztfüggvény, hogy

$$\lambda(t) = \begin{cases} 1 & ha\ t \in U \supset supp(f) \\ tetsz\text{ő}leges & egy\text{é}bk\text{é}nt \end{cases} \tag{5.21}$$

Megjegyzés 84 *Ha f reguláris disztribúció a és b környezetében, akkor*

$$\int_a^b f(t)dt \doteq < f|\lambda > + \int_a^b \mu(t)f(t)dt \tag{5.22}$$

korrekt definíció, ha a $\lambda(t)$ és $\mu(t)$ tesztfüggvények olyanok, hogy

$$\lambda(t) + \mu(t) = 1 \quad ha \quad t \in [a,b] \tag{5.23}$$

$$supp(\lambda(t)) \subset [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \tag{5.24}$$

$$\lambda(t) = 1 \quad ha \quad t \in [a+2\varepsilon, b-2\varepsilon] \tag{5.25}$$

Például értelmes az alábbiakat írni

$$\int_{-1}^{1} \delta(t)dt = 1 \quad vagy \quad \int_{-1}^{1} \delta'(t)dt = 0 \tag{5.26}$$

Tétel 85 ***Lokálisan*** *minden disztribúció egy folytonos függvény valahanyadik (véges rendű) deriváltja. K_I azon tesztfüggvények tere, melyek tartója az I intervallumba esik. Minden intervallumra és minden disztribúcióra igaz, hogy van olyan $r \in N$ szám és $h(x) \in C^0$ folytonos függvény, hogy*

$$< f|\varphi > = < h^{(r)}|\varphi > \quad ha \ \varphi \in K_I \tag{5.27}$$

Példa 86 *Belátható, hogy $\frac{d}{dx} ln|x| = P\frac{1}{x}$*

6. DIREKT SZORZAT ÉS A KONVOLÚCIÓ

6.1. Paramétertől függő tesztfüggvények

Tétel 87 *Legyen $\tau \in U_{\tau_0}$ folytonos paraméter τ_0 egy környezetéből. Ha*
i) $\varphi_\tau(x) \equiv \varphi(\tau, x) \in K(\mathbb{R}^n)$ tesztfüggvények x-ben minden τ-ra
ii) minden τ-ra létezik x-ben közös tartó: olyan $G \subset \mathbb{R}^n$ tartomány, hogy $supp(\varphi(\tau, x)) \subset G$ függetlenül τ-tól
iii) $D_x^k \varphi(\tau, x) \in C^0(\tau, x)$, minden x szerinti parciális derivált folytonos, mint (τ, x) függvénye $G \otimes U_{\tau_0}$-on
akkor $\psi(\tau) \doteq < f(x)|\varphi(\tau, x) >$ folytonos függvény, azaz

$$\psi(\tau_0) = < f(x)|\varphi(\tau_0, x) > \tag{6.1}$$

Tétel 88 *Az előző tétel feltételeit bővítve*
iv) $D_\tau D_x^k \varphi(\tau, x) \in C^0(\tau, x)$ *alakú parciális deriváltak folytonosak* $G \otimes U_{\tau_0}$*-on,*
akkor $\psi(\tau) \doteq < f(x)|\varphi(\tau, x) >$ *differenciálható függvény* $\tau = \tau_0$*-ban, és*

$$\left.\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0} =< f(x)| \left.\frac{\partial\varphi(\tau, x)}{\partial\tau}\right|_{\tau=\tau_0} > \tag{6.2}$$

Következmény 89 *Tekintsük az* $n + m$ *változós* $\varphi(x, y) \in K(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) = K^{n+m}$ *tesztfüggvényeket. Az iménti tételek alapján állíthatjuk, hogy tetszőleges* $f(x) \in K^{n*}$ *disztribúcióra*

$$\psi(y) \doteq < f(x)|\varphi(x, y) > \in K^m \quad \text{és} \quad D_y^k \psi(y) =< f(x)|D_y^k \varphi(x, y) > \tag{6.3}$$

6.2. Direkt (vagy tenzori) szorzat

Tétel 90 *Legyenek* $f(x) \in K^{n*}(x)$ *és* $g(y) \in K^{m*}(y)$ *disztribúciók és* $\varphi(x, y) \in K^{n+m}$*. A korábbi tétel szerint ekkor* $\psi(y) =< f(x)|\varphi(x, y) >\in K^m$ *tesztfüggvény. A* $g \otimes f$ ***direkt szorzat***

$$< g \otimes f|\varphi > \doteq < g(y)|\psi(y) >=< g(y)| < f(x)|\varphi(x, y) >> \tag{6.4}$$

disztribúció K^{n+m} *fölött.*

A linearitás nyilvánvaló. Az előző tétel szerint $\varphi_n(x, y) \overset{n+m}{\to} 0$ sorozatra $\psi_n(y) \in K^m$. Az nyilvánvaló, hogy ilyenkor $\psi_n(y) \to 0$ pontonként, a folytonosság bizonyításához még be kell látni, hogy $\psi_n(y) \overset{m}{\to} 0$ is igaz. Ez belátható. Akkor viszont g folytonosságából az állítás már következik.

Példa 91 *Delták direkt szorzata a többdimenziós delta*

$$\delta(x) \otimes \delta(y) = \delta(x, y) \tag{6.5}$$

ugyanis

$$< \delta(x) \otimes \delta(y)|\varphi(x, y) >=< \delta(x)| < \delta(y)|\varphi(x, y) >>=< \delta(x)|\varphi(x, 0) >= \varphi(0, 0) =< \delta(x, y)|\varphi(x, y) >$$

Példa 92 *Lokálisan integrálható függvényekre*

$$f, g \in L^1_{loc} \quad \Longrightarrow \quad f(x)g(y) \in L^1_{loc}(x, y)$$

és a direkt szorzat megegyezik a függvények 'közönséges' direkt szorzatával, azaz $g \otimes f = g(y)f(x)$*. Hiszen*

$$< g \otimes f|\varphi(x, y) >= \int g(y) \left(\int f(x)\varphi(x, y)dx \right) dy = \int \int g(y)f(x)\varphi(x, y)dxdy =< g(y)f(x)|\varphi(x, y) > \tag{6.6}$$

ahol kihasználtuk, hogy az adott körülmények között az integrálás sorrendje tetszőleges.

Tétel 93 *Bebizonyítható, hogy a direkt szorzat kommutatív és asszociatív művelet*

$$g \otimes f = f \otimes g \quad \text{és} \quad f \otimes [g \otimes h] = [f \otimes g] \otimes h \tag{6.7}$$

ahol pl. a kommutativitás azt jelenti, hogy

$$< g(x) \otimes f(y)|\varphi(x, y) >=< g(x)| < f(y)|\varphi(x, y) >>=< f(y)| < g(x)|\varphi(x, y) >>=< f(y) \otimes g(x)|\varphi(x, y) > \tag{6.8}$$

Tétel 94 *Ha az* f *disztribúció tartója* Ω_f *és a* g *disztribúció tartója* Ω_g*, akkor direkt szorzatuk tartója a tartók Descartes- (vagy direkt) szorzata*

$$\Omega_{f\otimes g} = \Omega_f \otimes \Omega_g$$

6.3. Konvolúciók

Az f és g függvények konvolúciós szorzatán azt a h függvényt értjük, ami előállítható

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int f(x)g(t-x)dx \tag{6.9}$$

már amennyiben az utóbbi integrál létezik. Függvényeket tükrözve, eltolva és megszorozva másik függvénnyel egyáltalán nem várható, hogy az eredmény integrálható lesz. A disztribúciók konvolúciójához használjuk és alakítsuk az előző esetleges alakot

$$\int h(t)\varphi(t)dt = \int\int f(x)g(t-x)\varphi(t)dtdx = \int\int f(x)g(y)\varphi(y+x)dydx$$

Láthatóan az utóbbi integrál reguláris disztribúciók direkt szorzatára emlékeztet. Értelmes definíció-e innen megsejtve az

$$< f * g|\varphi > \stackrel{?}{=} < f \otimes g|\varphi(x+y) > ?$$

Nem, ugyanis $\psi(x,y) = \varphi(x+y)$ nem tesztfüggvény, tartója nem korlátos, hanem az $x+y=0$ egyenessel párhuzamos szalag.

Tétel 95 *Disztribúciót eredményez a*

$$< f * g|\varphi > \doteq < f \otimes g|\lambda(x,y)\varphi(x+y) > \tag{6.10}$$

definíció, ha
*a) f **vagy** g korlátos tartójú, VAGY*
*b) f **és** g egyszerre jobbról/balról korlátos tarójú, (pl. jobbról korlátosak: $f(t)=0$ és $g(t)=0$ ha $t<T$)*
és ekkor

$$\lambda(x,y) \in K(x,y) \text{ tesztfüggvény olyan, hogy } \lambda(x,y) = 1 \text{ ha } (x,y) \in supp(f \otimes g) \cap supp\,(\varphi(x+y)) \tag{6.11}$$

Bizonyítás: Rajzolással mutassuk meg, hogy az iménti esetekben a két tartó $\Omega_{f\otimes g} \cap \Omega_{\varphi(x+y)}$ metszete korlátos, $\lambda(x,y)$ tesztfüggvény tehát választható. Ekkor $\lambda(x,y)\varphi(x+y) \in K(x,y)$, továbbá $\varphi_n(x) \stackrel{K(x)}{\to} 0$ sorozatokra $\lambda(x,y)\varphi_n(x+y) \stackrel{K(x,y)}{\to} 0$. A direkt szorzatról mondottak szerint viszont $f \otimes g$ folytonos, ami $f * g$ folytonosságát bizonyítja.

Tétel 96 *A konvolúció lineáris és kommutatív*

$$f(x) * (a \cdot g(x) + b \cdot h(x)) = a \cdot f * g + b \cdot f * h \quad \text{és} \quad f * g = g * f \tag{6.12}$$

Példa 97 *Két balról korlátos tartójú disztribúció: $\Theta * P\frac{\Theta}{x} = \Theta(x)log(x)$*

Példa 98 *Mivel a δ korlátos tartójú, tetszőleges $f \in K^*$ disztribúcióval konvolúcióba vihető*

$$\delta * f = f \quad \text{és} \quad \delta_a * f = f_a \tag{6.13}$$

ugyanis pl.

$$< \delta_a * f|\varphi > = < f * \delta_a|\varphi > = < f(y)|\varphi(y+a) > = < f(y-a)|\varphi(y) > = < f_a|\varphi >$$

Példa 99 *Minden $f \in K^*$ és $\delta^{(n)}$ konvolúció létezik és*

$$\delta^{(n)} * f = f^{(n)} \tag{6.14}$$

ugyanis

$$< \delta^{(n)} * f|\varphi > = < f * \delta^{(n)}|\varphi > = < f(y)| < \delta^{(n)}(x)|\varphi(x+y) >> = (-1)^n < f(y)|\varphi^{(n)}(y) > = < f^{(n)}|\varphi >$$

Példa 100 *Következésképpen minden állandó együtthatós differenciálformára írhatjuk, hogy*

$$\sum a_n f^{(n)} = f * \sum a_n \delta^{(n)} \tag{6.15}$$

Tétel 101 *Három vagy több disztribúció konvolúciója asszociatív:* $f * [g * h] = [f * g] * h$ *ha*
a) csak egyetlen tényező nem kompakt tartójú, VAGY
b) minden tényező jobbról, VAGY
c) minden tényező balról korlátos tartójú.

Példa 102 *(Ellenpélda)* $1 * \left[\delta' * \theta\right] = 1 \quad \leftrightarrow \quad \left[1 * \delta'\right] * \theta = 0 \quad \leftrightarrow \quad [1 * \theta] * \delta' =$ *nem létezik. Miért?*

Következmény 103 *Az asszociativitás és a kommutativitás miatt*

$$\text{differenciálásra:} \qquad (f * g)' = f' * g = f * g' \tag{6.16}$$

$$\text{eltolásra:} \qquad (f * g)_a = f_a * g = f * g_a \tag{6.17}$$

ugyanis

$$(f * g)' = f * g * \delta' = \delta' * f * g \quad , \qquad \text{illetve} \qquad (f * g)_a = f * g * \delta_a \tag{6.18}$$

Következmény 104 *Sőt,*

$$(f * g)^{(n)} = f^{(p)} * g^{(q)} \ , \text{ ahol } p + q = n \text{ egészek} \tag{6.19}$$

Tétel 105 *A konvolúció folytonos művelet abban az értelemben, hogy:*
Ha $f_\nu \to f$ *gyengén konvergens, akkor* $f_\nu * g \to f * g$ *is konvergens* K^**-on, ha*
a) g *korlátos tartójú, VAGY*
b) f_ν *csupa korlátos tartójú disztribúciók, VAGY*
c) f_ν *csupa jobbról/balról korlátos tartójú és* g *jobbról/balról korlátos tartójú*

Tétel 106 *Ismert* f *és* h *mellett az* $f * g = h$ *konvolúciós egyenlet megoldásához elegendő ismerni az* $f * f^{[-1]} = \delta$ *egyenlet* $f^{[-1]}$ *konvolúciós inverz megoldását, tetszőleges* h *esetén ugyanis* $g = f^{[-1]} * h$.

Láthatóan ez megoldása az egyenletnek, hiszen $f * g = f * \left(f^{[-1]} * h\right) = \left(f * f^{[-1]}\right) * h = \delta * h = h$. Bizonyítanunk kell még, hogy ez az egyelen megoldás. Tegyük fel, hogy g_1 és g_2 két megoldása az egyenletnek. Ekkor nyilván $f * (g_1 - g_2) = 0$. A konvolúciós inverz segítségével azonban $f^{[-1]} * (f * (g_1 - g_2)) = \left(f * f^{[-1]}\right) * (g_1 - g_2) = \delta * (g_1 - g_2) = (g_1 - g_2) = f^{[-1]} * 0 = 0$.

7. FOURIER-SOROK ÉS FOURIER-INTEGRÁLOK

Felelevenítünk néhány fogalmat a Fourier-transzformáció témaköréből. Az ismétlés szándéka mellett megmutatjuk, hogy az eddig megismert disztribúciók közvetlenül hasznosak az (inverz) transzformációk vizsgálatánál. Csak későbbi fejezetekben foglalkozunk majd azzal, hogy miként lehetne közönséges értelemben nem Fourier-transzformálható (sőt: általánosított) függvények transzformációját disztribúció értelemben elvégezni.

7.1. Szemelvények a Fourier-sorok témaköréből

Az I (véges, vagy végtelen) intervallumon értelmezett $\chi = \{\chi_n(x)\}$ véges vagy végtelen függvényrendszert ortogonálisnak nevezzük, amennyiben

$$(\chi_n, \chi_m) \doteq \int_I \bar{\chi}_n(x) \chi_m(x) dx = 0 \quad \text{ha} \quad n \neq m$$

Itt az L^2 komplex függvénytérben szokásos *Hermitikus* belső szorzatot használtuk, a felülvonás komplex konjugálást jelez.

Tétel 107 *Valahogyan kiválasztva és rögzítve* N *függvényt az összes*

$$P_N(x) = \sum_{n \in N} c_n \chi_n(x)$$

típusú (véges) 'polinomok' közül az $f(x)$ (periodikus) függvényt az I intervallumon átlagban a

$$c_n = \frac{\int_I \bar{\chi}_n(x) f(x) dx}{\int_I \bar{\chi}_n(x)\chi_n(x) dx} \tag{7.1}$$

választással közelítjük meg a legjobban (feltéve, hogy az integrálok léteznek)

Az egyszerűség kedvéért valós esetre és véges I intervallumra szorítkozunk. Ekkor az átlagban vett legjobb közelítés azt jelenti, hogy a

$$\Delta \doteq \frac{1}{I}\int_I \left| f(x) - \sum_{n\in N} c_n\chi_n(x)\right|^2 dx$$

átlagos négyzetes eltérés minimális. Valóban, ha $\Delta(c_1, c_2, ...)$ minimális, akkor

$$\frac{\partial\Delta}{\partial c_k} = -\frac{1}{I}\int_I \chi_k \left\{ f - \sum_{n\in N} c_n\chi_n \right\} dx = 0$$

amiből

$$\int_I \chi_k f dx = \sum_n c_n \int_I \chi_k\chi_n dx = c_k \int_I \chi_k\chi_k dx \tag{7.2}$$

Definíció 108 *Az (7.1) egyenletben definiált $\{c_n\}$ számokat az $f(x)$ függvénynek a χ ortogonális rendszerre vonatkozó Fourier-együtthatóinak nevezzük. Az ezen együtthatókkal felírt (véges, vagy végtelen) $\sum_n c_n\chi_n(x)$ sor a függvény χ-re vonatkozó Fourier-sora.*

Az $I = (-\pi, \pi)$ intervallumon gyakorta használjuk a trigonometrikus függvényeket

$$\chi = \left\{\sin(\pi n\frac{x}{L})\right\}_{n=1}^{\infty} \cup \left\{\cos(\pi n\frac{x}{L})\right\}_{n=0}^{\infty}$$

periodikus függvények Fourier-előállítására. Használhatjuk azonban tetszőleges függvény valamely **véges intervallumon** való vizsgálatára is ezt a trigonometrikus rendszert. Ugyanis alkalmas változó-transzformációval az analízist a $(-\pi, \pi)$ intervallumra átvihetjük és a transzformált függvényt ezen kívül periodikusan megismételhetjük, azzal a megjegyzéssel, hogy ekkor a végpontokban ($x = \pm\pi$) esetleges a definíciónk.

A trigonometrikus függvényrendszer tagjai páronként ortogonálisak az I intervallumon, hiszen

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx &= \begin{cases} \pi\delta_{n,m} & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases} \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx &= \begin{cases} \pi\cdot\delta_{n,m} & n \neq 0 \\ 2\pi & n = m = 0 \end{cases} \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx &= 0
\end{aligned}$$

A trigonometrikus függvényekre vett Fourier-sort gyakorta csak a függvény Fourier-sorának, az c_n koefficienseket a függvény Fourier-reprezentációjának hívjuk. A trigonometrikus függvények iménti rendszere **teljes** függvényrendszer, ami azt jelenti, hogy az átlagban való legjobb közelítés a kifejtendő függvények egy családjára olyan, hogy $\Delta = 0$, pontosabban

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{(n)}^{N} c_n\chi_n(x)\right|^2 dx = 0 \tag{7.3}$$

Az átlagos eltérés eltűnése nem mond sokat a pontonkénti konvergenciáról. Bizonyos feltételek mellett és bizonyos értelemben azonban a Fourier-sor 'előállíthatja' az eredeti függvényt

$$f(x) \cong \sum_{n}^{\infty} c_n\chi_n(x) \tag{7.4}$$

Erre vonatkozó állítások például az ún. Dini-feltétel, vagy a

Tétel 109 *(Dirichlet) Tegyük fel, hogy a $[-\pi,\pi]$ intervallum véges sok intervallumra bontható és ezeken a részintervallumokon $f(x)$ monoton és folytonos. Továbbá $f(x)$ szakadásainál olyan, hogy jobb- és baloldali határértéke $f(x_0+0)$ és $f(x_0-0)$ létezik, akkor*

$$\sum_n^\infty c_n\chi_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ahol } f(x) \text{ folytonos} \\ \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} & f(x) \text{ szakadási helyein} \end{cases} \tag{7.5}$$

Függetlenül attól, hogy a Fourier-sor pontonként előállítja-e a függvényt, szimbolikusan szokás azt írni, hogy

$$\begin{aligned} f(x) \quad \text{"}=\text{"} \quad & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n\cos(nx) + \sum_{n=1}^\infty b_n\sin(nx) \\ a_n \;=\; & \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad n=0,1,2,... \\ b_n \;=\; & \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \quad n=1,2,... \end{aligned}$$

Gyakran kényelmesebb a komplex alakot használni

$$\chi = \left\{\chi_n(x) = e^{inx}\right\}_{n=-\infty}^{\infty} \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\chi_n^*\chi_m dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{inx}\right)^* e^{imx}dx = 2\pi\delta_{n,m}$$

amivel a Fourier-sorok alakja

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \;\; \text{ahol} \;\; c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \tag{7.6}$$

A valós és a komplex együtthatók közötti összefüggés ekkor

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \qquad c_0 = \frac{1}{2}a_0$$

Fizikai alkalmazásokban érdekesebb gyakorta a 'spektrum', amikor a felbontást

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty \alpha_n\cos(nx - \vartheta_n)$$

alakban állítjuk elő. Nyilván

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha_n\cos(\vartheta_n) \qquad b_n = \alpha_n\sin(\vartheta_n) \\ \alpha_n^2 &= a_n^2 + b_n^2 \\ \tan(\vartheta_n) &= b_n/a_n \end{aligned}$$

Fontos, hogy ilyenkor α_n^2 független a ϑ_n fázistól, így α_n^2 az $\omega_n = n\cdot\omega_0$ harmonikus komponens spektrális intenzitását jellemzi.

Példa 110 *Legyen*

$$f(x) = x \qquad [-\pi,\pi] \text{ periodikusan ismételve}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot\cos(nx)dx = 0 \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left\{ -\left.\frac{x\cdot\cos(nx)}{n}\right|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx \right\} = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \end{aligned}$$

azaz

$$f(x) = 2\left\{\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + .. + (-1)^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n} + ...\right\}$$

A sorfejtés érdekessége, hogy mindkét oldalt véve az $x = \pi/2$ helyen kapjuk a π meghatározására alkalmas Leibniz-formulát:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + ...$$

Amellett, hogy periodikus függvények Fourier-együtthatóit direkt integrálással meghatározhatjuk, a fordított feladattal is talalkozunk, nevezetesen adott c_n együtthatók mellett a felírt trigonometrikus sor felösszegezhető-e (konvergens-e). A konvergencia szükséges feltétele, hogy a c_n együtthatók elég gyorsan csökkenjenek. Például, ha a trigonometrikus sor egy k-szor folytonosan differenciálható függvény Fourier-sora, akkor $c_n n^{k+1} \to 0$ ha $n \to \infty$

Megjegyzés 111 *Tegyük fel, hogy $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ konvergens.*
- Az integrált Fourier-sor

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int^x e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{in} e^{inx}$$

is konvergens, sőt gyorsabban konvergál, mint az eredeti.
- Differenciálással óvatosan kell bánni, hiszen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{d}{dx} e^{inx} = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} n c_n e^{inx}$$

lassabban, vagy egyáltalán nem konvergens (duális térben igen...)

Hagyományosan nem konvergens trigonometrikus sorok disztribució-értelemben konvergensek lehetnek.

Tétel 112 *Legyen t egy valós változó. Ha létezik olyan k egész és M pozitív valós szám, hogy $|c_n| < M |n|^k$ minden $n \neq 0$ mellett, akkor a*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \tag{7.7}$$

trigonometrikus sor konvergens K^*-on. Ilyenkor a sor összege $c_0 + g^{(p)}(t)$, ahol $p \geq k+2$ nemnegativ egész és $g(t)$ a

$$g(t) = \sum_{n=-\infty\ ,\ n\neq 0}^{\infty} \frac{c_n}{(in)^p} e^{int} \tag{7.8}$$

Fourier-sorral adott folytonos függvény.

A $g(t)$ folytonos függvény létezik. Ez következik abból, hogy $\left|\frac{c_n}{(in)^p}\right| \leq M |n|^{-2}$ és az ilyen tulajdonságú Fourier-sor **egyenletesen** konvergens minden t-re. De ekkor (indukált konvergencia) $g(t)$ sora konvergens K^*-on is. A duális térben viszont sorok akárhányszor differenciálhatók és a differenciálás tagonként is elvégezhető. Mármost disztribúció értelemben

$$g^{(p)}(t) = \sum_{n=-\infty\ ,\ n\neq 0}^{\infty} c_n e^{int} \tag{7.9}$$

amiből az állítás nyilvánvaló.

Példa 113 *Megmutatjuk, hogy*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{int} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2n\pi) \tag{7.10}$$

Most

$$g(t) = -\sum_{n=-\infty\ ,\ n\neq 0}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{int} = -\frac{1}{2}(t-\pi)^2 \quad \textit{mikor} \ \ 0 < t < 2\pi \tag{7.11}$$

azaz

$$g^{(1)}(t) = \pi - t \ \ \textit{mikor} \ \ 0 < t < 2\pi \ \ \textit{és} \ \ \textit{periodikusan ismételve} \tag{7.12}$$

A teljes (periodikus) első deriváltat nézve, látjuk, hogy annak 2π nagyságú szakadásai vannak a minden $t = 2n\pi$ pontban, így a disztribúció-értelemben vett további deriváltra

$$g^{(2)}(t) = -1 + 2\pi\delta(t - 2n\pi) \tag{7.13}$$

Ellenőrizhető, hogy $g(t)$ Fourier-sora az iménti, hiszen

$$\begin{aligned} 2\pi c_n &= \int_0^{2\pi} g(t)e^{-int}dt = \frac{1}{-in}\left[g(t)e^{-int}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} g'(t)e^{-int}dt \right] && (7.14) \\ &= \frac{1}{n^2}\left[g'(t)e^{-int}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} g^{''}(t)e^{-int}dt \right] && (7.15) \\ &= \frac{1}{n^2}\left[-\pi - \pi - 0 \right] = -\frac{2\pi}{n^2} && (7.16) \end{aligned}$$

mert $g(0) = g(2\pi)$ az elsőben, továbbá $g'(0) = \pi = -g'(2\pi)$.

7.2. Fourier-integrálok

Tétel 114 *Legyen az $f \in L^1$ lokálisan integrálható függvény abszolút integrálható, azaz*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$$

Akkor az

$$\tilde{f}(\omega) = \mathcal{F}\left[f(x)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \tag{7.17}$$

definícióval adott $\tilde{f}(\omega)$ függvény (az $f(x)$ ***Fourier-transzformáltja****) létezik és minden $\omega \in (-\infty, \infty)$ -re*
a) korlátos függvény
b) egyenletesen folytonos

a) A korlátosság abból látható, hogy $\left|\tilde{f}(\omega)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$

b) Az egyenletes folytonossághoz meg kell mutatnunk, minden $\varepsilon > 0$ számhoz van η olyan, hogy $\left|\tilde{f}(\omega) - \tilde{f}(\omega + \eta)\right| < \varepsilon$ függetlenül ω-tól. Ennek belátásához írjuk fel, hogy

$$\left|\tilde{f}(\omega) - \tilde{f}(\omega + \eta)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\left(1 - e^{-i\eta x}\right)dx\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\left|1 - e^{-i\eta x}\right| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\left|2\, sin(\frac{\eta x}{2})\right| dx$$

ahol látjuk, hogy a különbség nagysága ω-tól függetlenül felül becsülhető. A jobb oldal tetszőleges kicsivé tehető, mivel

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\left|2\, sin(\frac{\eta x}{2})\right| dx \leq 2\left\{\int_{-\infty}^{T} + \int_{-T}^{\infty}\right\}|f(x)|\, dx + \int_{-T}^{T} |f(x)|\left|\eta x \frac{sin(\frac{\eta x}{2})}{\frac{\eta x}{2}}\right| dx < \varepsilon$$

Az első tagban $f(x)$ abszolút integrálhatósága miatt T választható úgy, hogy

$$2\left\{\int_{-\infty}^{T} + \int_{-T}^{\infty}\right\}|f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2} \ \ \text{ha} \ \ T > T_\varepsilon$$

A második tagnál pedig minden T mellett

$$\int_{-T}^{T} |f(x)|\left|\eta x \frac{sin(\frac{\eta x}{2})}{\frac{\eta x}{2}}\right| dx \leq \eta T \int_{-T}^{T} |f(x)|\, dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \ \ \text{ha} \ \ \eta > \eta_{\varepsilon T}$$

Ahogy a Fourier-soroknál, úgy a Fourier-(integrál)transzformációnál is több tétel szól arról, hogy milyen értelemben lehet a transzformációt megfordítani. A példa kedvéért álljon itt két tétel a klasszikus analízisből:

Tétel 115 *Legyen* $f \in L^1$ *és* $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$ *, továbbá* $f^{(1)}(x)$ ***folytonos*** *valamely* $x \in (a,b)$ *intervallumban. Akkor az*

$$f_y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-y}^{y} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \tag{7.18}$$

függvénysorozat konvergens az (a,b) *intervallumon és*

$$f(x) = \lim_{y\to\infty} f_y(x) = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-y}^{y} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \ , \ x \in (a,b) \tag{7.19}$$

Tétel 116 *Ha* $\tilde{f}(\omega)$ *lokálisan és abszolút integrálható, akkor*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \tag{7.20}$$

(persze ez esetben a korábbi tételünk szerint $f(x)$ ***egyenletesen folytonos****)*

Más jelölésben gyakran írjuk, hogy

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\tilde{f}(\omega)\right](x) \tag{7.21}$$

A tétel bizonyítása most nem érdekes a számunkra, ugyanis disztribúció-értelemben ezek a megszorítások elengedhetők.

Tétel 117 *(Inverz transzformáció speciális reguláris disztribúciókra) Legyen* $f \in L^1$ *és* $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$*, akkor*

$$f_y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-y}^{y} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \tag{7.22}$$

K^* *(gyengén) konvergál és*

$$< f(x)| = \lim_{y\to\infty} \ < f_y(x)| \tag{7.23}$$

A bizonyításhoz előbb írjuk fel, hogy

$$f_y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-y}^{y} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-y}^{y}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-i\omega x'} dx'\right) e^{i\omega x} d\omega$$

és vegyük észre, hogy $f(x')e^{-i\omega(x'-x)}$ abszolút integrálható a $(-y < \omega < y \ ; \ -\infty < x' < \infty)$ tartományon. Így az integrálás sorrendje felcserélhető és

$$f_y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\left(\int_{-y}^{y} e^{-i\omega(x'-x)} d\omega\right) dx' = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\frac{sin(y(x'-x))}{(x'-x)} dx'$$

- 1) **Rossz** folytatás

  $$\frac{sin(y(x'-x))}{(x'-x)} = \pi\delta_y(x'-x) \quad \text{és} \quad \lim_{y\to\infty} \delta_y(x'-x) = \delta(x'-x)$$

  és "alkalmazzuk" az eltolt δ-t az $f(x')$-re

  $$f(x) =< \delta(x'-x)|f(x') >$$

  A hiba ebben az, hogy f nem (feltétlenül) tesztfüggvény, így a Dirac-delta nem biztos, hogy alkalmazható rá.

- 2) **Rossz** folytatás

  $$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\frac{sin(y(x'-x))}{(x'-x)} dx' = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)\frac{sin(yt)}{\pi t} dt = f * \delta_y$$

  ahol észrevettünk egy esetleges konvolúciót. Innen mondhatnánk, hogy

  $$\lim_{y\to\infty} f * \delta_y = f * \lim_{y\to\infty} \delta_y = f * \delta = f$$

  csakhogy semmit sem tudunk $f(x)$ tartójáról. Sajnos $\delta_y(x)$ tartója nem korlátos, így az $f * \delta_y$ konvolúció esetleg nem is definiálható, vagy ha igen, akkor sem garantált, hogy a konvolúció folytonos.

- Korrekt folytatás: Legyen $k_y(x)$ olyan, hogy

$$k_y(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} \delta_y(x) & \text{ha} & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{ha} & |x| > 1 \end{array} \right\}$$

Megmutatható, hogy

$$\lim_{y\to\infty} k_y(x) = \delta(x)$$

(egyszerűbb azt megmutatni, hogy a $K_y(x) = \delta_y(x) - k_y(x)$ reguláris disztribúcióra $< K_y|\varphi > \to 0$). Ekkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)\frac{sin(yt)}{\pi t}dt = f * k_y + h_y(t) \;\; \text{ahol} \;\; h_y(t) = \int_{|t|>1}^{\infty} f(t-x)\frac{sin(yt)}{\pi t}dt$$

Most helyes azt mondani, hogy

$$\lim_{y\to\infty} f * k_y = f * \delta = f$$

csak azt kellene még megmutatni, hogy a (reguláris) $h_y(t)$ disztribúciók a nulla disztribúcióhoz tartanak, azaz tesztfüggvényekre

$$\lim_{y\to\infty} < h_y|\varphi >= \lim_{y\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\left(\int_{|t|>1}^{\infty} f(t-x)\frac{sin(yt)}{\pi t}dt\right)dx = 0$$

Az integrálás sorrendje megint felcserélhető és a

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(t-x)dx \quad \in C^{\infty}$$

függvény létezik. Szükséges, hogy ekkor

$$\lim_{y\to\infty} \int_{|t|>1}^{\infty} g(t)\frac{sin(yt)}{\pi t}dt = 0$$

legyen. Ez viszont igaz, hiszen

$$\left|\int_{|t|>1}^{\infty} g(t)\frac{sin(yt)}{t}dt\right| \leq \left|\int_{|t|>1}^{\infty} g(t)sin(yt)dt\right| \leq \frac{1}{y}\left|C + \int_{|t|>1}^{\infty} g'(t)cos(yt)dt\right| \to 0$$

mivel $g(\pm 1)cos(y)$ véges és $g(\infty) = 0$.

Szükségünk lesz a későbbiekben az alábbi tételre:

Tétel 118 *Parseval-formula (egyik változat)*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\tilde{g}(t)dt$$

Mindkét Fourier-transzformált ($\tilde{f}$ és $\tilde{g}$) korlátos, mindkét oldal létezik. Kiírva

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}dx\right)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-itx}dt\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\tilde{g}(t)dt$$

ahol az integrálás sorrendjét felcseréltük. Tehetjük, mert $f(x)g(t)e^{-itx}$ abszolút integrálható a (t, x) síkon.

7.3. Példák Fourier-integrálok számolására

Példa 119 *A Gauss-görbe Fourier-transzformáltja szintén Gauss-görbe*

$$\mathcal{F}\left[e^{-ax^2}\right](\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \quad \text{ahol} \quad a>0$$

Az

$$\tilde{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}e^{-i\omega x}dx$$

integrál közvetlen kiszámolása helyett vegyük észre, hogy

$$\frac{d}{d\omega}\tilde{f}(\omega)=\frac{i\omega}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}(-2ax)\,e^{-ax^2}e^{-i\omega x}dx=\frac{i}{2a}\left(e^{-ax^2}e^{-i\omega x}\Big|+i\omega\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}e^{-i\omega x}dx\right)=-\frac{\omega}{2a}\tilde{f}(\omega)$$

Az így kapott differenciálegyenlet egyszerűen integrálható

$$\tilde{f}(\omega)=Ce^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

De

$$\tilde{f}(0)=C=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Példa 120 *A Lorentz-görbe Fourier-transzformáltja*

$$\mathcal{F}\left[e^{-a|x|}\right](\omega)=\tilde{f}(\omega)=2\int_0^{\infty}e^{-ax}cos(\omega x)dx$$

Parciális integrálással

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\omega)&=-\frac{2}{a}\left(e^{-ax}cos(\omega x)\big|_0^{\infty}+\omega\int_0^{\infty}e^{-ax}sin(\omega x)dx\right)\\&=-\frac{2}{a}\left(-1-\frac{\omega}{a}\left(e^{-ax}sin(\omega x)\big|_0^{\infty}-\omega\int_0^{\infty}e^{-ax}cos(\omega x)dx\right)\right)\\&=-\frac{2}{a}\left(-1+\frac{\omega^2}{2a}\tilde{f}(\omega)\right)\end{aligned}$$

De ekkor

$$\tilde{f}(\omega)=\frac{2}{a}\left(1-\frac{\omega^2}{2a}\tilde{f}(\omega)\right)\quad\rightarrow\quad\tilde{f}(\omega)(1+\frac{\omega^2}{a^2})=\frac{2}{a}$$

azaz

$$\mathcal{F}\left[e^{-a|x|}\right](\omega)=2\frac{a}{a^2+\omega^2}$$

Példa 121 *Az előbbi transzformáció inverze szintén fontos*

$$e^{-a|x|}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(-\omega)e^{-i\omega x}d\omega=\frac{1}{\pi}\mathcal{F}\left[\frac{a}{a^2+\omega^2}\right](x)$$

ahol használtuk, hogy $\tilde{f}(\omega)$ páros függvény.

8. A SCHWARTZ-TÉR

A disztribúciókat korábban a korlátos tartójú alaptér függvényeire vizsgáltuk. Meg fogjuk mutatni, hogy a korlátos tartójú függvények Fourier-transzformáltja nem korlátos tartójú függvény. A K^* általánosított függvényeinek a Fourier-transzformáltját emiatt nem tudjuk értelmezni. Egy másik alapteret vezetünk be, a **Schwartz-teret**, ami olyan függvényekből áll, hogy a Fourier-transzformáció nem vezet ki a térből.

8.1. Gyorsan csökkenő sima függvények

Definíció 122 *Az S (Schwartz-) tér a gyorsan csökkenő C^∞ sima $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ függvények lineáris tere. A gyors csökkenés azt jelenti, hogy minden $p, k_i = 0, 1, 2..$ indexekre létezik olyan $M_{p,\mathbf{k}}$ véges szám, hogy*

$$\|\mathbf{x}\|^p \left|D^{\mathbf{k}}\varphi(\mathbf{x})\right| < M_{p,\mathbf{k}} \text{ , ahol } D^{\mathbf{k}}\varphi(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{k_1+..+k_n}}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}}\varphi(x_1, ..., x_n) \text{ parciális derivált} \tag{8.1}$$

A függvények bármilyen hatványfüggvény reciprokánál gyorsabban tűnnek el nagy argumentumokra, ugyanis

$$\|\mathbf{x}\|^{p+1} \left|D^{\mathbf{k}}\varphi(\mathbf{x})\right| < M_{p+1,\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{x}\|^p D^{\mathbf{k}}\varphi(\mathbf{x}) \underset{\|\mathbf{x}\|\to\infty}{\to} 0$$

Alternatív megfogalmazás:

$$\underset{\mathbf{x}}{sup} \left\{\|\mathbf{x}\|^p \left|D^{\mathbf{k}}\varphi(\mathbf{x})\right|\right\} < \infty \tag{8.2}$$

ahol szuprémum helyett maximumot is írhatunk.

Megjegyzés 123 *A K-beli függvények S -függvények is: $K \subset S$. Ugyanakkor $K \neq S$, hiszen például $\varphi(x) = exp(-x^2) \notin K$, de $\varphi \in S$.*

Megjegyzés 124 *Ha $g \in C^\infty$ és $\varphi \in S$, akkor általában $g\varphi \notin S$. A sima,* ***polinom-nagyságrendű*** *függvények*

$$P := \{p(x) \mid |D^\alpha g(x)| \le C_\alpha(1 + |x|)^{m_\alpha}\} \tag{8.3}$$

bármelyikével való szorzás viszont megengedett. Ha $p(x) \in P$, azaz a sima függvény és deriváltjai egy polinomnál lassabban nőnek, akkor $p\varphi \in S$.

8.2. Fourier-transzformáció a Schwartz-téren

Az S térbeli függvények Fourier-transzformáltja

$$\mathcal{F}[\varphi](\omega) = \tilde{\varphi}(\omega) = \int \varphi(\mathbf{x})e^{-i\omega\mathbf{x}}d^n\mathbf{x} \tag{8.4}$$

nyilván létezik. A transzformáció invertálható

$$\mathcal{F}^{-1}[\tilde{\varphi}](\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int \tilde{\varphi}(\omega)e^{i\omega\mathbf{x}}d^n\omega \tag{8.5}$$

A továbbiakban csak az egyváltozós függvényeket tárgyaljuk, a több dimenzióra való általánosítás kézenfekvő.

Tétel 125 *A Fourier-transzformáció és inverze a S-et önmagára képezi le.*

a) $\varphi \in S_x \Rightarrow \mathcal{F}[\varphi] = \tilde{\varphi} \in S_\omega$, amihez az kell belátnunk, hogy

$$\tilde{\varphi}^{(k)}(\omega) = \frac{d^k}{d\omega^k}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-i\omega x}dx$$

létezik, C^∞ és gyorsan csökken. Minden $\varphi \in S$ függvényre az iménti integrál *egyenletesen konvergens* ω szerint, így a differenciálás bevihető az integrál jel mögé:

$$\tilde{\varphi}^{(k)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}(-ix)^k\varphi(x)e^{-i\omega x}dx \tag{8.6}$$

Az integrál létezik, mivel $x^k\varphi(x) \in S$, és ekkor tudjuk, hogy $\tilde{\varphi}^{(k)}(\omega)$ (egyenletesen) folytonos. A gyorsan csökkenést parciális integrálással mutatjuk meg. Tetszőleges $m = 0, 1, 2, ...$ számokra igaz, hogy

$$\tilde{\varphi}^{(k)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}(-ix)^k\varphi(x)e^{-i\omega x}dx = \left(\frac{1}{i\omega}\right)^m\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^m}{dx^m}\left\{(-ix)^k\varphi(x)\right\}e^{-i\omega x}dx, \quad \text{mivel } \frac{d^\nu}{dx^\nu}x^k\varphi(x) \to 0 \tag{8.7}$$

De $\frac{d^m}{dx^m}\left\{x^k\varphi(x)\right\} \in S$ és akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d^m}{dx^m}\left\{x^k\varphi(x)\right\}\right| dx \leq M_{m,k}$$

amiből

$$\left|\omega^m\tilde{\varphi}^{(k)}(\omega)\right| \leq M_{m,k}$$

b) $\tilde{\varphi} \in S_\omega \;\Rightarrow\; \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\varphi}] = \varphi \in S_x$ hasonlóan mutatható meg, hiszen az exponenciális faktor előjelét nem használtuk ki az előző bizonyításban.

Tétel 126 *A Fourier-transzformáció S önmagára való kölcsönösen egyértelmű lineáris leképezése.*

Következmény 127 $\mathcal{F}[\varphi] = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$

Következmény 128 *Valódi inverz:* $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = Id_S$

Tétel 129 *Hasznos összefüggések a Fourier-transzformáltak között:*

$$\mathcal{F}[(-ix)^k\varphi(x)] = \frac{d^k}{d\omega^k}\mathcal{F}[\varphi(x)] \qquad \mathcal{F}[\varphi^{(k)}(x)] = (i\omega)^k\mathcal{F}[\varphi(x)] \tag{8.8}$$

$$\mathcal{F}[\varphi(x-t)] = e^{-i\omega t}\mathcal{F}[\varphi(x)] \qquad \mathcal{F}[e^{-ixt}\varphi(x)] = \mathcal{F}[\varphi(x)](\omega+t) \tag{8.9}$$

$$\mathcal{F}[\varphi(ax)] = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}[\varphi(x)](\frac{\omega}{a}) \tag{8.10}$$

8.3. Erős konvergencia

Definíció 130 *A (φ_j) függvénysorozatot akkor tekinjük S (erős) értelemben konvergensnek: $\varphi_j \xrightarrow{S} \varphi$, ha $\varphi_j \in S$ olyanok, hogy*

$$\|\mathbf{x}\|^p D^{\mathbf{k}}\varphi_j(\mathbf{x}) \underset{j\to\infty}{\rightarrow} \|\mathbf{x}\|^p D^{\mathbf{k}}\varphi(\mathbf{x}) \tag{8.11}$$

minden $\mathbf{k}$ és p indexekre, $\mathbf{x}$-ben egyenletesen.

Ekvivalens megfogalmazások

$$\underset{\mathbf{x}}{sup}\left\{\|\mathbf{x}\|^p\left|D^{\mathbf{k}}\varphi_j(\mathbf{x}) - D^{\mathbf{k}}\varphi(\mathbf{x})\right|\right\} \to 0 \qquad \text{minden} \quad p, k_i = 0,1,2.. \text{ indexre} \tag{8.12}$$

vagy (φ_j) egyenletesen konvergens minden korlátos tartományon és

$$\|\mathbf{x}\|^p\left|D^{\mathbf{k}}\varphi_j(\mathbf{x})\right| < M^0_{p,\mathbf{k}} \quad \text{közös korlát, független } j\text{-től} \tag{8.13}$$

Megjegyzés 131 *A konvergencia valójában az S téren bevezethető*

$$\|\varphi\|_{p,\mathbf{k}} \doteq \underset{\mathbf{x}}{sup}\left\{\|\mathbf{x}\|^p\left|D^{\mathbf{k}}\varphi(\mathbf{x})\right|\right\} \tag{8.14}$$

normával hozható kapcsolatba. (Ellenőrizhető, hogy ez valóban teljesíti a normára szokásos feltételeket.) Az erős konvergencia ezekkel

$$\varphi_j \xrightarrow{S} \varphi \quad\Leftrightarrow\quad \|\varphi_j - \varphi\|_{p,\mathbf{k}} \to 0 \quad minden \quad p, k_i = 0,1,2..indexre \tag{8.15}$$

Megjegyzés 132 *A Schwartz-tér zárt az erős konvergenciára. Az egyenletes konvergenciából következik, hogy $D^{\mathbf{k}}\varphi_j \to D^{\mathbf{k}}\varphi$ folytonos függvény létezik. A határfüggvény ugyanakkor gyorsan csökken az $M^0_{p,\mathbf{k}}$ közös korlátnak megfelelően.*

Tétel 133 *A polinom nagyságrendű függvényekkel való szorzás folytonos művelet:*

$$\varphi_j \xrightarrow{S} \varphi \quad \Rightarrow \quad p\varphi_j \xrightarrow{S} p\varphi \quad ahol\ p \in P \tag{8.16}$$

Tétel 134 *A K-beli konvergenciából következik az S-beli:*

$$\varphi_j \xrightarrow{K} \varphi \;\Rightarrow\; \varphi_j \xrightarrow{S} \varphi \tag{8.17}$$

Tétel 135 *K mindenütt sűrű S-ben, azaz bármely $\varphi \in S$-hez van olyan (φ_j) sorozat K-ból, hogy $\varphi_j(x) \xrightarrow{S} \varphi$.*

Legyen a $\psi \in K$ olyan, hogy $\psi(0) = 1$. Valamely $\varphi \in S$ célfüggvényhez

$$\varphi_\varepsilon(x) \doteq \varphi(x)\psi(\varepsilon x) \in K \text{ és } \varphi_\varepsilon(x) \xrightarrow{S} \varphi, \text{ miközben } \varepsilon \to 0 \tag{8.18}$$

Tétel 136 *A Fourier-transzformáció (és inverze) folytonos leképezés.*

Az $\mathcal{F}$ linearitása miatt elegendő a $\varphi_j(x) \xrightarrow{S} 0$ sorozatokat vizsgálni. Korábban (8.7)-ben láttuk, hogy

$$(i\omega)^m \,\tilde{\varphi}_j^{(k)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^m}{dx^m} \left\{(-ix)^k \varphi_j(x)\right\} e^{-i\omega x} dx$$

A differenciálást elvégezhetjük az integrandusban

$$(i\omega)^m \,\tilde{\varphi}_j^{(k)}(\omega) = (-i)^k \sum_{l=0}^{M} \int_{-\infty}^{\infty} \binom{m}{l} \frac{k!}{(k-l)!} x^{k-l} \varphi_j^{(m-l)}(x) e^{-i\omega x} dx \quad \text{ahol} \quad M = min(m,k)$$

és írhatjuk, hogy

$$\left|\omega^m \tilde{\varphi}_j^{(k)}(\omega)\right| \leq \sum_{l=0}^{M} \binom{m}{l} \frac{k!}{(k-l)!} \int_{-\infty}^{\infty} \left| x^{k-l} \varphi_j^{(m-l)}(x) \frac{1+x^2}{1+x^2} \right| dx$$

ahol a jobboldal független ω-tól. A konvergencia feltételét kihasználva

$$\sup_x \left| x^p \varphi_j^{(k)} \right| \underset{j\to\infty}{\to} 0 \quad \Rightarrow \quad \sup_x \left| x^{k-l} \left(1+x^2\right) \varphi_j^{(m-l)}(x) \right| \underset{j\to\infty}{\to} 0$$

továbbá

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

miatt következik, hogy

$$\left|\omega^m \tilde{\varphi}_j^{(k)}(\omega)\right| \xrightarrow{S} 0$$

9. TEMPERÁLT (VAGY MÉRSÉKELT) DISZTRIBÚCIÓK

9.1. Az S tér folytonos lineáris funkcionáljai

Definíció 137 *Az f lineáris funkcionál* ***temperált disztribúció:*** *$f \in S^*$, ha*

$$\varphi_j(x) \xrightarrow{S} 0 \quad \Rightarrow \quad < f|\varphi_j > \to 0 \tag{9.1}$$

Tétel 138 *Mivel $K \subset S$ és $\varphi_j(x) \xrightarrow{K} 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_j(x) \xrightarrow{S} 0$, f megszorítása K-ra (f_K) disztribúció K^*-ban.*

Következmény 139 *Következésképpen $K \subset S \subset S^* \subset K^*$.*

Tétel 140 *Ha két disztribúció egyenlő $K \subset S$-en, akkor az egész S téren egyenlők*

$$f|_K = g|_K \quad \Rightarrow \quad f = g \tag{9.2}$$

Megmutattuk, hogy K sűrű S-ben, azaz minden $\varphi \in S$ függvényhez van $\varphi_\varepsilon(x) \xrightarrow{S} \varphi$ sorozat, ahol $\varphi_\varepsilon \in K$. De akkor

$$< (f-g)\,|\varphi >= \lim_{\varepsilon\to 0} < (f-g)\,|\varphi_\varepsilon >= \lim_{\varepsilon\to 0} < (\,f|_K - g|_K)\ |\varphi_\varepsilon >= 0 \tag{9.3}$$

Következmény 141 *A gyenge konvergenciára ekkor szükségképpen igaz, hogy*

$$< f_j| \xrightarrow{K^*} < f| \quad \Rightarrow \quad < f_j| \xrightarrow{S^*} < f|$$

Definíció 142 *Az f valós függvényre az mondjuk, hogy lassan nő, ha létezik olyan X és p, hogy*

$$f(x) \sim O(|x|^k) \ : \ |f| \le |x|^p \qquad amikor \quad |x| > X \tag{9.4}$$

Tétel 143 *Bármely f temperált disztribúció f_ε simitása lassan növő függvény*

Tétel 144 *(Schwartz) f pontosan akkor temperált disztribúció, ha létezik $c > 0$ és $p \ge 0$ olyanok, hogy bármely $\varphi \in S$ tesztfüggvényre*

$$|< f|\varphi >| \le c\,\|\varphi\|_p \quad ahol \quad \|\varphi\|_p = \begin{pmatrix} sup \\ |\alpha| \le p \end{pmatrix}_{(x)} (1+|x|)^p\,|D^\alpha \varphi| \tag{9.5}$$

Elégséges: $\varphi_j(x) \xrightarrow{S} 0 \Rightarrow \|\varphi_j\|_p \to 0$ és akkor $|< f|\varphi_j >| \to 0$
Szükséges: Valamely $f \in S^*$-ra tegyük fel, hogy c és p nem létezik. Akkor van olyan φ_k sorozat, hogy

$$|< f|\varphi_k >| \ge k\,\|\varphi_k\|_k$$

De az ebből készített sorozatra

$$\psi_k \doteq \frac{\varphi_k}{\sqrt{k}\,\|\varphi_k\|_k} \xrightarrow{S} 0$$

mivel

$$|x|^\beta\,|D^\alpha \psi_k| = \frac{|x|^\beta\,|D^\alpha \varphi_k|}{\sqrt{k}\,\|\varphi_k\|_k} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{|x|^\beta\,|D^\alpha \varphi_k|}{\binom{sup}{|\gamma|\le k}_{(x)} (1+|x|)^k\,|D^\gamma \varphi_k|} \le \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{ha} \quad k > max(\alpha,\beta)$$

A linearitás miatt viszont

$$|< f|\psi_k >| = \left| < f|\frac{\varphi_k}{\sqrt{k}\,\|\varphi_k\|_k} > \right| = \frac{1}{\sqrt{k}\,\|\varphi_k\|_k}\,|< f|\varphi_k >| \ge \sqrt{k}$$

lenne, ami ellentmond f folytonosságának.

Tétel 145 *(Schwartz) f pontosan akkor mérsékelt disztribúció, ha léteznek olyan p és k egész számok, hogy*

$$f = g^{(p)} \ ahol\ g(x) \in C^0 \ folytonos \ \ és\ g(x) \sim O(|x|^k) \ lassan\ növő\ függvény \tag{9.6}$$

Hasonló állításunk volt K^*-on, de az csak **lokálisan** volt igaz.

Példa 146 *Sajnos $f = e^x$ nem mérsékelt disztribúció, túl gyorsan nő és ezen semmilyen simitás sem segít.*

Példa 147 *Jóllehet függvény-értelemben $f = e^x cos(e^x)$ nem lassan növő, mégis $f \in S^*$. Ugyanis*
a) mert simitással megváltozik a függvény végtelenbeli viselkedése
b) $e^x cos(e^x) = \frac{d}{dx} sin(e^x)$, azaz egy nyilvánvalóan mérsékelt disztribúció deriváltja

9.2. Temperált disztribúciók Fourier-transzformáltja

Definíció 148 *Az $f \in S^*$ disztribúció Fourier-transzformáltja az az $\mathcal{F}[f]$ disztribúcó, amire*

$$<\mathcal{F}[f]\,|\varphi> \doteq <f|\mathcal{F}[\varphi]> \quad , \quad \forall\varphi \in S \text{ -re} \tag{9.7}$$

(reguláris disztribúciókra ez éppen a Parseval-formula: $<\tilde{f}|\varphi> \doteq <f|\tilde{\varphi}>$)

Tétel 149 *Az így definiált $\mathcal{F}[f]$ valóban disztribúció, azaz folytonos lineáris leképezés.*

Ez következik abból, hogy $<\mathcal{F}[f]\,| : S \to \mathbb{C}$ leképezés az $<f| : S \to \mathbb{C}$ és az $\mathcal{F} : S \to S$ folytonos leképezések $<f| \circ \mathcal{F}$ kompozíciója.

Tétel 150 *A Fourier-transzformáció és inverze kölcsönösen egyértelmű $S^* \rightleftharpoons S^*$ leképezés.*

Következmény 151 *Tehát $\mathcal{F}[f] = 0 \Leftrightarrow f = 0$ és $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = Id_{S^*}$*

Tétel 152 *A Fourier-transzformáció $\mathcal{S}^*$ önmagára való* ***folytonos*** *leképezése.*

Következmény 153 *A gyengén konvergens sorozatokat, sorokat szabad tagonként Fourier-transzformálni:*

$$f = \sum^{\infty} g_\nu \in S^* \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F}[f] = \sum^{\infty} \mathcal{F}[g_\nu] \tag{9.8}$$

Tétel 154 *A Fourier-transzformáltakra említett (8.8,8.9,8.10) azonosságok igazak a disztribúciókra is.*

Hiszen pl.

$$\begin{aligned} <\mathcal{F}[(-ix)^k f(x)](\omega)|\varphi(\omega)> &= \; <(-ix)^k f(x)|\mathcal{F}[\varphi(\omega)](x)> = <f(x)|(-ix)^k\mathcal{F}[\varphi(\omega)](x) = <f(x)|(-1)^k\mathcal{F}[\varphi^{(k)}(\omega)]> \\ &= \; <\mathcal{F}[f(x)](\omega)|(-1)^k\varphi^{(k)}(\omega)> = <\frac{d^k}{d\omega^k}\mathcal{F}[f(x)]|\varphi(\omega)> \end{aligned}$$

Tétel 155 *Inverziós formula*

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(x)]] = 2\pi f(-x) \tag{9.9}$$

Tétel 156 *Ha f korlátos tartójú, akkor*

$$\mathcal{F}[f] = <f(x)|\lambda(x)e^{-i\omega x}> \quad \text{ahol } \lambda(x) \in K \text{ olyan, hogy } \lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in \Omega \supset supp(f) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{9.10}$$

Példa 157 *Mivel a Dirac-delta korlátos tartójú*

$$\mathcal{F}[\delta] = 1 \tag{9.11}$$

amiből az inverziós formulával

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta \tag{9.12}$$

Általánosítva eljutunk a fejezet egyik ***fő eredmény****éhez:*

$$\mathcal{F}\left[\delta^{(k)}(t-\tau)\right] = (i\omega)^k e^{-i\omega\tau} \quad \text{és} \quad \mathcal{F}\left[(it)^k e^{-it\tau}\right] = (-1)^k 2\pi\delta^{(k)}(\omega+\tau) \tag{9.13}$$

Példa 158 *Az előzőből egy polinom Fourier-transzformáltjára kapjuk, hogy*

$$\mathcal{F}\left[\sum_{n=0}^{p} a_n x^n\right](\omega) = 2\pi\sum_{n=0}^{p} a_n i^n \delta^{(n)}(\omega) \tag{9.14}$$

Példa 159 *(Poisson-összegzés) A Fourier-sorok tárgyalásakor megmutattuk (7.10)-ben, hogy*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{inx} = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n) \tag{9.15}$$

mindkét oldal konvergens K^*-ban és egyenlőek. Az itt szereplő disztribúciók egyúttal temperált disztribúciók is, hiszen egy periodikus (tehát lassan növő) növő folytonos függvény második deriváltjaként álltak elő. Ekkor viszont az egyenlőség S^*-on is igaz. Lehet tagonként Fourier-transzformálni:

$$2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n) = 2\pi \mathcal{F}\left[\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n)\right](\omega)$$

Alkalmazzuk előbb a baloldali kifejezést egy tesztfüggvényre

$$\sum_{-\infty}^{\infty} < \delta(\omega - n)|\varphi >= \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi(n)$$

majd a jobboldalit

$$< \mathcal{F}\left[\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n)\right]|\varphi >= \sum_{-\infty}^{\infty} < \delta(x - 2\pi n)|\mathcal{F}[\varphi] >= \sum_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\varphi](2\pi n)$$

majd a két eredményt összevetve kapjuk a Poisson-féle összegzési képletet:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \varphi(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\varphi](2\pi n) \tag{9.16}$$

Példa 160 *A Heaviside-függvénnyel kapcsolatos Fourier-transzformáltak:*

$$\mathcal{F}[x^n \Theta(x)](\omega) = i^n \pi \delta^{(n)}(\omega) + P\left(\frac{n!}{(i\omega)^{n+1}}\right) \quad , \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{9.17}$$

Igazolni csak az $n = 0$ speciális esetre fogjuk, ezt viszont két módszerrel is.
a) Tudjuk, hogy $\Theta' = \delta$, és ebből

$$i\omega \mathcal{F}[\Theta] = \mathcal{F}[\Theta'] = \mathcal{F}[\delta] = 1 \quad \Rightarrow \quad i\omega \mathcal{F}[\Theta] = 1$$

Az utóbbi egyenlet általános megoldása

$$\mathcal{F}[\Theta] = c\delta(\omega) + P\left(\frac{1}{i\omega}\right) \tag{9.18}$$

ahol a határozatlan állandót (kanonikusan) válasszuk meg úgy, hogy

$$\mathcal{F}[\Theta(x) + \Theta(-x)] = \mathcal{F}[1] = 2\pi\delta$$

teljesüljön. Felhasználva, hogy $\mathcal{F}[f(-x)](\omega) = \mathcal{F}[f(x)](-\omega)$ kapjuk, hogy $c = \pi$.
b) A reguláris $\Theta_a(x) = \Theta(x)e^{-ax}$ disztribúciók gyengén konvergens sorozatára igaz, hogy

$$\Theta_a(x) \underset{a \to 0}{\to} \Theta(x)$$

A Fourier-transzformáció folytonos a duális téren, így

$$\mathcal{F}\left[\Theta(x)e^{-ax}\right] \underset{a \to 0}{\to} \mathcal{F}[\Theta]$$

A közönséges Fourier-transzformáltak kiszámíthatók:

$$\mathcal{F}\left[\Theta(x)e^{-ax}\right] = \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-i\omega x} dx = -\left.\frac{e^{-(a+i\omega)x}}{(a + i\omega)}\right|_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{a + i\omega} \tag{9.19}$$

és a határátmenet során a

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{a+i\omega} = \pi\delta(\omega) + P\left(\frac{1}{i\omega}\right) \tag{9.20}$$

összefüggés egy általános tesztfüggvényen igazolható. Ugyanis

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\omega)}{a+i\omega}d\omega = \varphi(0)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a-i\omega}{a^2+\omega^2}d\omega + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{a-i\omega}{a^2+\omega^2}\left(\varphi(\omega)-\varphi(0)\right)d\omega$$

és

$$\int_0^{\infty}\frac{a}{a^2+\omega^2}d\omega = \frac{\pi}{2}$$

miatt

$$\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\omega)}{a+i\omega}d\omega = \pi\varphi(0) - i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\omega)-\varphi(0)}{\omega}d\omega$$

Példa 161 *Az $sgn(x)$ előjel függvény Fourier-transzformáltja:*

$$\mathcal{F}\left[sgn(x)\right] = \mathcal{F}\left[\Theta(x)-\Theta(-x)\right] = 2P\left(\frac{1}{i\omega}\right) \tag{9.21}$$

Példa 162 *Majd ebből $\mathcal{F}\left[\mathcal{F}\left[f\left(x\right)\right]\right] = 2\pi f\left(-x\right)$ használatával*

$$\mathcal{F}\left[P\left(\frac{1}{x}\right)\right] = -i\pi sgn(\omega) \tag{9.22}$$

Példa 163 *Megmutatható, hogy:*

$$\mathcal{F}\left[P\left(\frac{1}{|x|}\right)\right] = -2(\gamma + ln\,|\omega|) \quad ahol \quad \gamma = \int_0^1\frac{1-cos(x)}{x}dx - \int_1^{\infty}\frac{cos(x)}{x}dx \text{ az Euler szám} \tag{9.23}$$

9.3. Direkt szorzat

Tétel 164 *Bármely $f(x)\in S^*(\mathbb{R}^n)$ és $g(y)\in S^*(\mathbb{R}^m)$ esetén a*

$$< f(x)\otimes g(y)|\varphi(x,y) > \doteq < f(x)| < g(y)|\varphi(x,y) >> \tag{9.24}$$

direkt szorzat disztribúció: $f(x)\otimes g(y)\in S^*(\mathbb{R}^{n+m})$

Vázlat a bizonyításhoz:
-mutassuk meg, hogy $\psi(x) =< g(y)|\varphi(x,y) >\in S(\mathbb{R}^n)$ és $D^\alpha\psi(x) =< g(y)|D_x^\alpha\varphi(x,y) >$
-ezután mutassuk meg, hogy $\varphi_j(x,y) \overset{S^{n+m}}{\rightarrow} 0 \Rightarrow \psi_j(x) \overset{S^n}{\rightarrow} 0$
amikből már következik, hogy $g : S(\mathbb{R}^{n+m}) \to S(\mathbb{R}^n)$ folytonos. De $f : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ is az, ezzel kész.

Tétel 165 *A direkt szorzat kommutatív:*

$$f(x)\otimes g(y) = g(y)\otimes f(x) \tag{9.25}$$

és asszociatív

$$f(x)\otimes(g(y)\otimes h(z)) = (f(x)\otimes g(y))\otimes h(z) \tag{9.26}$$

Következmény 166 *Speciálisan $g(y) = 1(y)$ azonosan 1 függvénnyel*

$$< f(x)|\int\varphi(x,y)dy >= \int < f(x)|\varphi(x,y) > dy \tag{9.27}$$

("a disztribúció bevihető az integráljel mögé")

Tétel 167 *A direkt szorzat a duális terek közötti*

$$g(y)\otimes\ :\ S^*(\mathbb{R}^n)\to S^*(\mathbb{R}^{n+m})\qquad \textit{és}\qquad f(x)\otimes\ :\ S^*(\mathbb{R}^m)\to S^*(\mathbb{R}^{n+m})$$

folytonos *lineáris leképezés:* $f_n\to f\ \Rightarrow\ g\otimes f_n\to g\otimes f$

Tétel 168 *Direkt szorzat Fourier-transzformáltjára*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[f(x)\otimes g(y)\right](\omega,\xi) &= \mathcal{F}_x\left[f(x)\otimes\mathcal{F}_y[g(y)](\omega)\right](\xi) && (9.28)\\ &= \mathcal{F}_y\left[\mathcal{F}_x[f(x)](\xi)\otimes g(y)\right](\omega) && (9.29)\\ &= \mathcal{F}_x[f(x)](\xi)\otimes\mathcal{F}_y[g(y)](\omega) && (9.30)\end{aligned}$$

9.4. Mérsékelt disztribúciók konvolúciója, a konvolúció Fourier-transzformáltja

Tétel 169 *Konvolúció:*

$$< f*g|\varphi >\doteq< f(x)\otimes g(y)|\eta(x,y)\varphi(x+y) >\ \in S^* \tag{9.31}$$

ha az alábbiak valamelyike teljesül:
*i) f **vagy** g korlátos tartójú (pl. f olyan, akkor $\lambda(x,y)=\lambda(x)\in K$ és $\eta(x)=1$ ha $x\in supp\{f\}$ megfelel)*
*ii) vagy f **és** g egyszerre jobbról, vagy balról korlátos tartójúak (mondjuk balról, és akkor $\eta(x,y)=\eta_1(x)\eta_2(y)$, $\eta_i\in C^\infty$; $\eta_i(t)=1$ ha $t\in[min\{T_g,T_f\},\infty)$ és $\eta_i(t)=0$ ha $t<T<min\{T_g,T_f\}$ egy választás)*

Tétel 170 *Csak az első típusú konvolúciókra mondjuk ki: A konvolúció Fourier-transzformáltja*

$$\mathcal{F}\left[(f*g)(x)\right](\omega)=\mathcal{F}\left[f(x)\right](\omega)\cdot\mathcal{F}\left[g(x)\right](\omega) \tag{9.32}$$

I) eset: f **és** g korlátos tartójú. EkkorA $h(x)=f*g$ konvolúciós szorzat korlátos tartújó, így

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[h(x)\right](\omega) &= < h|\lambda(x)e^{-i\omega x} >=< f(x)|< g(y)|\lambda(x+y)e^{-i\omega(x+y)} >\\ &= < f(x)|< g(y)|\lambda_1(x)\lambda_2(y)e^{-i\omega(x+y)} >\\ &= < f(x)|\lambda_1(x)e^{-i\omega x} >< g(y)|\lambda_2(y)e^{-i\omega y} >\end{aligned}$$

mivel $\lambda(x)$ választható úgy, hogy $\lambda(x+y)=\lambda_1(x)\lambda_2(y)$ legyen.
II) eset: g korlátos tartójú. Ekkor g Fourier-transzformáltja egy polinom-nagyságrendű sima függvény

$$\mathcal{F}\left[g\right](\omega)=p(\omega)\in P \tag{9.33}$$

így tetszőleges f disztribúcióra

$$\begin{aligned}&< \mathcal{F}\left[f*g(x)\right](\omega)|\varphi(\omega) >=< f*g(x)|\mathcal{F}\left[\varphi(\omega)\right](x) >=< f(x)|< g(y)|\lambda(y)\mathcal{F}\left[\varphi(\omega)\right](x+y) >\\ &< f(x)|< g(y)|\lambda(y)\int\varphi(\omega)e^{-i\omega(x+y)}d\omega >=< f(x)|\int< g(y)|\lambda(y)e^{-i\omega y} >\varphi(\omega)e^{-i\omega x}d\omega >\\ &< f(x)|\int p(\omega)\varphi(\omega)e^{-i\omega x}d\omega >=< f(x)|\mathcal{F}\left[p(\omega)\varphi(\omega)\right] >=< \mathcal{F}\left[f(x)\right](\omega)|p(\omega)\varphi(\omega) >\\ &< \mathcal{F}\left[f(x)\right](\omega)|\mathcal{F}\left[g(x)\right](\omega)\varphi(\omega) >=< \mathcal{F}\left[f\right]\mathcal{F}\left[g\right]|\varphi >\end{aligned}$$

Tétel 171 *Integrál-egyenletek megoldásánál különösen hasznos, hogy*

$$\begin{aligned}f*g\ =\ h\ \ \Rightarrow\ \ \tilde{f}\tilde{g}=\tilde{h} && (9.34)\\ && (9.35)\end{aligned}$$

Az utóbbi egyenleből formálisan megpróbálhatjuk kiszámolni g-t az alábbi áatalakítások valamelyikével

$$\tilde{g}=\tilde{h}/\tilde{f}\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}g=\mathcal{F}^{-1}\left[\tilde{h}/\tilde{f}\right]\\ g=h*\mathcal{F}^{-1}\left[1/\tilde{f}\right]\end{array}\right\}$$

amennyiben ezek értelmesek. (Sajnos ritkán...)

9.5. Periodikus disztribúciók

A periodikus $f(x) = f(x+2n\pi)\ :< f|\varphi(x) >=< f|\varphi(x-2n\pi) >$ disztribúciók automatikusan temperáltak.

Tétel 172 *Periodikus disztribúciók Fourier-transzformáltja*

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right](\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n) \tag{9.36}$$

A Fourier-transzformált egyertélműségéből

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right](\omega) = \mathcal{F}\left[f(x+2n\pi)\right](\omega)$$

majd a disztribúciókra (is) igaz (8.9) tulajdonság miatt

$$\mathcal{F}\left[f(x+2n\pi)\right](\omega) = e^{i2\pi\omega}\mathcal{F}\left[f(x)\right](\omega)$$

A kettőt összevetve

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right](\omega)\left(1 - e^{i2\pi\omega}\right) = \tilde{f}(\omega)\left(1 - e^{i2\pi\omega}\right) = 0$$

Mivel

$$g(\omega) = \left(1 - e^{i2\pi\omega}\right) = 0 \quad \text{ha} \quad \omega = 0, 1, 2, ... \tag{9.37}$$

$\tilde{f}(\omega)$ pontokra koncentrált (g zéróhelyeire). Továbbá

$$lim_{\omega\to n}\frac{g(\omega-n)}{\omega-n} = lim_{\omega\to n}\frac{1-e^{i2\pi\omega}}{\omega-n} = -2ie^{in\pi}lim_{\omega\to n}\frac{sin(\pi\omega)}{\omega-n} \neq 0 \tag{9.38}$$

így valóban

$$\tilde{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n)$$

A c_n állandók határozatlanok maradnak. Ettől eltekintve láthatjuk, hogy a periodikus disztribúciók Fourier-transzformáltja a szokásos Fourier-sorokat fogja eredményezni: az inverz segítségével

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\delta(\omega-n)\right] = \frac{1}{2\pi}e^{inx} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{9.39}$$

10. EGYÉB ALAPTEREK

10.1. A Hilbert-tér

- Lineáris (vagy vektor-) tér (az $F = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ test felett)
  1) lineáris kombinációk: $au + bv \in H$ ha $a, b \in F$ és $u, v \in H$
  2) lineáris kombináció asszociatív és kommutatív
  3) $a(bu) = ab(u)$
  4) $a(u+v) = au + av$ és $(a+b)u = au + bu$
  5) egyértelmű $\emptyset$ úgy, hogy $\emptyset + u = u$
  6) $1u = u$ és $0u = \emptyset$

- Normált tér, $\|u\| \in \mathbb{R}$
  7) $\|u\| > 0$ ha $u \neq \emptyset$
  8) $\|\emptyset\| = 0$
  9) $\|au\| = |a|\,\|u\|$
  10) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

- Hermitikus belső szorzat
  A) $(u, v) = (v, u)^*$ és a norma innen származik: $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$
- Konvergencia
  Az (u_n) sorozatot konvergensnek mondjuk H-értelemben (normában), ha minden $\varepsilon > 0$ számra $\|u_n - u_m\| < \varepsilon$ ha $n, m \geq N_\varepsilon$
  B) H teljes a normában való konvergenciára: Cauchy-sorozatokra $u_\infty \in H$

Példa 173 *$\mathbb{R}^n$, az n dimenziós euklideszi vektortér Hilbert-tér.*

Példa 174 *($\mathbb{R}^n$-ből $n \to \infty$ általánosítással) A végtelen dimenziós l^2 tér elemei azok a komplex számokból álló $\xi = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, ...\}$ sorozatok, melyekre*

$$\|\xi\|^2 = \sum |\xi_k|^2 < \infty \tag{10.1}$$

ezen a Hilbert-téren a belső szorzat:

$$(\xi, \eta) = \sum \xi_k^* \eta_k \tag{10.2}$$

Példa 175 *A végtelen dimenziós $L^2([a, b])$ vagy $L^2(\mathbb{R}^n)$ tér a $\varphi(x_1, ..., x_n)$ komplex, négyzetesen integrálható függvények Hilbert tere a*

$$(\varphi, \psi) = \int \varphi^* \psi \, dV \tag{10.3}$$

belső szorzattal.

10.2. A Hilbert-tér önduális

Nyilvánvaló, hogy a véges dimenziós Hilbert-terek önduálisak. Végtelen dimenzióra a Riesz-Fréchet-tétel állítása szerint igaz, hogy a Hilbert-tér fölötti disztribúciók tere izomorf a Hilbert-térrel.

Tétel 176 *A Hilbert-tér korlátos (=folytonos) lineáris funkcionáljai felírhatók*

$$T[u] = (t, u) \qquad t, u \in H$$

alakban, ahol t egyértelmű.

Tekintsük a kérdéses lineáris funkcionál null-terét

$$M \doteq \{v \mid T[v] = 0\}$$

ami nyilván lineáris tér. T folytonossága miatt M **zárt altere** H-nak.Ugyanis, ha $v_n \to w$ miközben $v_n \in M$, akkor

$$|T[w]| = |T[v_n] - T[w]| \leq K \|v_n - w\| \to 0 \qquad \Rightarrow \qquad T[w] = 0$$

Mármost, ha $M = H$, akkor készen vagyunk, mert

$$t = \emptyset \;\; T[u] = (\emptyset, u) = 0$$

Egyéb esetben legyen $u_1, u_2 \in M^\perp$ (a kiegészítő altér két tetszőleges eleme) és készítsük el az

$$u = T[u_1]u_2 - u_1 T[u_2]$$

vektort. Ez a vektor, mint lineáris kombináció $M^\perp$ egy eleme, de egyszerre benne van M-ben is, hiszen $T[u] = 0$. Az egyetlen ilyen u vektor az $u = \emptyset$, amiből az következik, hogy $M^\perp$ nem lehet 1-nél több dimenziós.
Válasszunk ki egy tetszőleges w vektort $M^\perp$-ből. A

$$t = \frac{T[w]^*}{\|w\|^2} w \tag{10.4}$$

jó választás, hiszen tetszőleges $u \in H$ felírható $u = v + \lambda w$ $(v \in M)$ alakban, és

$$(t|u) = \frac{T[w]}{\|w\|^2}(w|u) = \lambda T[w] = T[u]$$

Következmény 177 *A fordított állítás is igaz: bármely $t \in H$ folytonos lineáris funkcionált definiál a $T[u] = (t, u)$ hozzárendeléssel. A folytonosság a*

$$|(t, u_n - u_m)| \leq \|t\| \cdot \|u_n - u_m\|$$

Schwartz-egyenlőtlenségből látható.

10.3. Egész függvények: Z a K tér Fourier-transzformáltja

Legyen a $\varphi(t) \in K$ függvény tartója olyan, hogy $supp\{\varphi\} \subset [-a, a]$. A Fourier-transzformáltja

$$\tilde{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-ixt} dt = \int_{-a}^{a} \varphi(t) e^{-ixt} dt$$

biztosan létezik és kiterjeszthető a teljes komplex síkra:

$$\phi(z) = \tilde{\varphi}(x + iy) \in C^{\omega}$$

Ez a $\phi(z)$ ú.n. **egész** (*angol:* **entire**) függvény, ami azt jelenti, hogy reguláris, vagy **analitikus** az egész komplex síkon. Ugyanis a

$$\phi(z) = \int_{-a}^{a} \varphi(t) e^{-izt} dt$$

integrál integrandusa sima függvény $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ -en, továbbá z-nek analitikus függvénye és az integrál egyenletesen konvergens minden z-re. Amellett, hogy $\phi(z)$ analitikus, parciális integrálással kapjuk, hogy tetszőleges k természetes számra

$$\phi(z) = \frac{1}{(-iz)^k} \int_{-a}^{a} \varphi^{(k)}(t) e^{-izt} dt$$

amiből

$$\left| z^k \phi(z) \right| \leq \int_{-a}^{a} \left| \varphi^{(k)}(t) \right| \left| e^{-izt} \right| dt \leq e^{a|y|} \int_{-a}^{a} \left| \varphi^{(k)}(t) \right| dt \quad , \text{ ahol } \ z = x + iy$$

Felhasználva, hogy K-beli tesztfüggvényekre

$$\int_{-a}^{a} \left| \varphi^{(k)}(t) \right| dt \leq C_k$$

kapjuk, hogy a Fourier-transzformáltjuk a komplex síkra kiterjesztve rendelkezik a

$$\left| z^k \phi(z) \right| \leq C_k e^{a|y|} \quad , \quad y = Im(z)$$

tulajdonsággal.

Definíció 178 *A Z-tér a komplex síkon értelmezett azon egész függvények tere, melyekre minden $\phi(z) \in Z$-hez vannak olyan $a, C_0, C_1, \ldots$ állandók, hogy*

$$\left| z^k \phi(z) \right| \leq C_k e^{a|y|} \quad , \quad y = Im(z) \tag{10.5}$$

Tétel 179 *A Fourier-transzformáció és inverze kölcsönösen egyértelmű leképezés K és Z között.*

a) $\varphi(t) \in K \to \tilde{\varphi} \in Z$ előbb bizonyítva
b) $\phi(z) \in Z \to \tilde{\phi} \in K$ bizonyításához a komlex számsíkon Cauchy-integrálással írhatjuk, hogy

$$\tilde{\phi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) e^{-ixt} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x + iy) e^{-i(x+iy)t} dx$$

mivel $\phi(z)e^{-izt}$ analitikus és $1/|x|$ minden hatványánál gyorsabban eltűnik $|x| \to \infty$ -ben bármely véges y mellett. felhasználva, hogy

$$|\phi(z)| \leq C_0 e^{a|y|} \quad \text{és} \quad |z|^2 |\phi(z)| \leq C_2 e^{a|y|} \quad \Rightarrow \quad |\phi(z)| \leq \frac{C_0 + C_2}{1+|z|^2} e^{a|y|} \leq e^{a|y|} \frac{C}{1+x^2}$$

kapjuk a

$$\left|\tilde{\phi}(t)\right| \leq e^{yt} e^{a|y|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C}{1+x^2} dx = C\pi e^{yt+a|y|}$$

egyenlőtlenséget. Válasszuk az

$$y = -\beta \frac{|t|}{t} \quad , \quad \beta > 0$$

értéket, amivel

$$\left|\tilde{\phi}(t)\right| \leq C\pi e^{-\beta(|t|-a)}$$

Mivel ez tetszőleges β-ra igaz, a $\beta \to \infty$ átmenetből látható, hogy $\left|\tilde{\phi}(t)\right| = 0$ ha $|t| > a$.

Megjegyzés 180 *A Fourier-transzformációban nem használtuk az* $e^{\pm ixt}$ *faktorban az exponens előjelét, így az inverz transzformációra a bizonyítás ugyanígy megy.*

Megjegyzés 181 $K \cap Z = 0$, *azaz* $\varphi \in K$ ***nem*** *lehet egész függvény, kivéve, ha azonosan nulla. Ugyanis egy* $\varphi \in K$ *korlátos tartójú függvénynek a komplex számsíkra való kiterjesztése azonosan nulla lenne a komplex sík egy véges tartományán kívül. De ha egy komplex analitikus függvény nulla valamely analitikus pontja környezetében, akkor a teljes regularitási tartományában nulla.*

Tétel 182 $\phi(z) \in Z \to \phi(x) \in S$, *azaz* $Z \subset S$

Igaz, hogy $\phi^{(m)} \in Z$, hiszen

$$\phi(z) \in Z \;\Rightarrow\; \tilde{\phi}(x) \in K \;\Rightarrow\; t^m \tilde{\phi}(t) \in K \;\Rightarrow\; \phi^{(m)} \in Z$$

Akkor viszont

$$\phi^{(m)}(x) \in C^{\infty} \qquad \text{és} \qquad \left|x^k \phi^{(m)}(x)\right| \leq C_{k,m}$$

Tétel 183 Z *sűrű* S*-ben, minden* $\varphi \in S$*-hez van olyan* $\phi_n \in Z$ *sorozat, hogy* $\phi_n \xrightarrow{S} \varphi$

Tudjuk, ha $\varphi \in S$, akkor $\mathcal{F}^{-1}[\varphi] \in S$. Azt is tudjuk, hogy K sűrű S-ben, azaz van olyan sorozat, hogy $\chi_n \xrightarrow{S} \mathcal{F}^{-1}[\varphi]$ miközben $\chi_n \in K$. A Fourier-transzformáció folytonos a Schwartz-téren, emiatt

$$\mathcal{F}[\chi_n] \xrightarrow{S} \varphi \qquad \text{és} \qquad \mathcal{F}[\chi_n] \in Z.$$

10.4. Konvergencia Z-n

Definíció 184 *A* (ϕ_n) *sorozatot akkor mondjuk* $Z-$*értelemben konvergensnek, ha*

- $\phi_n \in Z$
- $\phi_n \to \phi$ a komplex sík minden korlátos tartományán **egyenletesen**
- $\exists\, a, C_k$ függetlenek n-től úgy, hogy $\left|z^k \phi_n(x)\right| \leq C_k e^{a|y|}$ minden n-re

Tétel 185 *A* Z *tér zárt erre a konvergenciára nézve*

Tétel 186 $\mathcal{F} : K \to Z$ *és* $\mathcal{F}^{-1} : Z \to K$ *folytonos leképezések a* Z *illetve a* K *erős konvergencia szellemében.*

Tétel 187 $\phi_n \xrightarrow{Z} \phi \Rightarrow \phi_n \xrightarrow{S} \phi$

10.5. Ultra-disztribúciók: Z^*

Tétel 188 *$S^* \subset Z^*$ valódi altér*

Valamely $f \in S^*$ megszorítása lineáris funkcionál $Z \subset S$-en. Az előző tétel szerint a Z-beli konvergencia maga után vonja az S-beli konvergenciát, így f is folytonos a Z téren.

Következmény 189 *A Dirac-delta ultradisztribúció: $\delta \in Z^*$*

Példa 190 *Reguláris disztribúciók: Minden lokálisan integrálható függvény disztribúciót definiál az $< f|\phi >\doteq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx$ utasítással.*

Tétel 191 *Az ultradisztribúciókra a korábban megismert elemi műveleteket (eltolás, inverzió, differenciálás,...) hasonló módon bevezethetjük. Ezeket külön nem soroljuk fel. Új művelet a komplex eltolás*

$$< f(x+a)|\phi(x) >\doteq< f(x)|\phi(x-a) > \qquad a \in \mathbb{C} \tag{10.6}$$

Következmény 192 *Ezzel kiterjesztettük az általánosított függvényeket a komplex síkra. Hiszen*

$$< f(z)|\phi(x) >=< f(x)|\phi(z^*) > \tag{10.7}$$

Érdekes észrevenni, hogy

$$< f(z)|\phi(z) >=< f(x)|\phi(x) > \tag{10.8}$$

ami egyébként a Cauchy-integrálformula, ezúttal általánosított függvényekre is.

Példa 193 *A "komplex változós delta függvény"*

$$< \delta^{(k)}(z)|\phi(x) >=< \delta(z)|(-1)^k\phi^{(k)}(x) >=< \delta(x)|(-1)^k\phi^{(k)}(x-iy) >= (-1)^k\phi^{(k)}(-iy) \tag{10.9}$$

Példa 194 *K^* és Z^* viszonyáról: A) $e^{x^2} \notin Z^*$ (amúgy K^*-beli) B) $\delta(x-ia) \notin K^*$ (amúgy Z^*-beli)*

10.6. Gyenge konvergencia

Definíció 195 *Az (f_n) sorozat konvergens Z^*-on, ha az $< f_n|\phi >$ számsorozat konvergens minden $\phi \in Z$ tesztfüggvényen.*

Tétel 196 *Z^* zárt erre a konvergenciára*

Tétel 197 *Minden ultradisztribúció "Taylor-sorba" fejthető. Bármely $\alpha \in \mathbb{C}$ számra*

$$f(x+\alpha) = \sum^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} f^{(n)}(x) \tag{10.10}$$

Mivel $\phi(x-\alpha) \in Z$ egész függvény a

$$s_v^a(x) = \sum^{\nu} \frac{(-\alpha)^n}{n!} \phi^{(n)}(x) \tag{10.11}$$

részletösszegek minden α komplex számra és minden x-re pontonként konvergensek és

$$s_v^a(x) \underset{v\to\infty}{\rightarrow} \phi(x-\alpha)$$

A következő Lemmában belátjuk, hogy

$$s_v^a(x) \xrightarrow{Z} \phi(x-\alpha)$$

is igaz. Akkor pedig

$$\begin{aligned} < f(x+\alpha)|\phi(x) > &= < f(x)|\phi(x-\alpha) >= \lim_{\nu\to\infty} < f(x)| \sum^{\nu} \frac{(-\alpha)^n}{n!} \phi^{(n)}(x) > \\ &= \lim_{\nu\to\infty} < \sum^{\nu} \frac{(\alpha)^n}{n!} f^{(n)}(x)|\phi(x) >=< \sum^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} f^{(n)}|\phi > \end{aligned}$$

Lemma 198 *A részletösszegek*

$$\tilde{s}_v^a = \mathcal{F}(s_v^a) = \sum^{\nu} \frac{(-\alpha)^n}{n!}\mathcal{F}(\phi^{(n)}(x)) = \sum^{\nu} \frac{(-\alpha)^n}{n!}(i\omega)^n\tilde{\phi}(\omega) = \tilde{\phi}(\omega)\sum^{\nu} \frac{(-\alpha)^n}{n!}(i\omega)^n$$

Fourier-transzformáltjai egy K-beli sorozatot alkotnak. Mivel $\tilde{\phi}(\omega) \in K$, a hátsó összegben ω csak egy véges tartományon érdekes. Vegyük észre, hogy

$$\sum^{\nu} \frac{(-\alpha)^n}{n!}(i\omega)^n$$

az exponenciális függvény egy részletösszege, ami viszont bármely véges ω intervallumon egyenletesen konvergens. Ezzel, és a Fourier-transzformáció folytonosságát használva megállapíthatjuk, hogy

$$\tilde{s}_v^a \xrightarrow{K} \tilde{\phi}(\omega)e^{-i\alpha\omega} \qquad \Rightarrow \qquad s_v^a \xrightarrow{Z} \phi(x-\alpha)$$

10.7. Ultradisztribúciók Fourier-transzformáltja

Definíció 199 *Minden $f \in K^*$ disztribúcióhoz definiáljuk az $\mathcal{F}[f] \in Z^*$ Fourier-transzformáltat*

$$< \mathcal{F}[f]|\phi(x) > \doteq < f|\mathcal{F}[\phi(x)] > \tag{10.12}$$

és hasonlóan $f \in Z^*$-hoz az $\mathcal{F}[f] \in K^*$-ot

Tétel 200 *A Fourier-transzformáció kölcsönösen egyértelmű leképezés K^* és Z^* között.*

Tétel 201 *$\mathcal{F}$ és $\mathcal{F}^{-1}$ folytonos leképezés K^* és Z^* között.*

Következmény 202 *Az $\sum^{\infty} f_n$ sor pontosan akkor konvergens K^*-on, amikor $\sum^{\infty} \tilde{f}_n$ konvergens Z^*-on. Tehát szabad tagonként Fourier-transzformálni.*

Tétel 203 *A Fourier-transzformáltakra felírt azonosságok (differenciálás, skálázás,...) érvényesek az ultradisztribúciókra is. Ezeken túlmenően a komplex eltolás lehetősége jelenik meg*

$$\mathcal{F}[e^{-i\alpha\tau}f(x)](\omega) = \mathcal{F}[f(x)](\omega+\alpha) \;\; \alpha \in \mathbb{C}\;, \quad f \in K^* \tag{10.13}$$

és hasonlóak az inverz transzformációkra.

Példa 204 *A konvergens*

$$e^{\alpha t} = \sum^{\infty} \frac{(\alpha t)^n}{n!} \in K^* \;\; \alpha \in \mathbb{C}$$

sort transzformálva

$$\mathcal{F}[e^{\alpha t}] = \sum^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}\mathcal{F}[t^n] = 2\pi \sum^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!}\delta^{(n)}(\omega) = 2\pi\delta(\omega + i\alpha)$$

Az első egyenlőségben az használtuk ki, hogy szabad tagonként Fourier-transzformálni, a középső (9.13) miatt igaz, az utolsó pedig a (10.10) Taylor-sorokkal kapcsolatos tétel következménye.
Figyeljük meg, hogy az exponenciális függvény nem lassan növő, mégis sikerült értelmezni a Fourier-transzformáltját (persze azt már csak a Z tér függvényeire alkalmazhatjuk). Kiemelve az eredményt:

$$\mathcal{F}[e^{\alpha t}] = 2\pi\delta(\omega + i\alpha) \tag{10.14}$$
$$\mathcal{F}[\sinh(\alpha x)] = \pi\{\delta(\omega+i\alpha) - \delta(\omega - i\alpha)\} \tag{10.15}$$
$$\mathcal{F}[\cosh(\alpha x)] = \pi\{\delta(\omega+i\alpha) + \delta(\omega - i\alpha)\} \tag{10.16}$$

Ha az utóbbi két transzformációban az eddig tetszőleges α-t úgy választjuk meg, hogy $\alpha = i\tau$ ($\tau \in \mathbb{R}$) legyen, akkor $e^{\alpha t} = e^{i\tau t}$ már lassan nő. Tehát az S^* téren is igaz, hogy

$$\mathcal{F}[\sin(\tau x)] = i\pi\{\delta(t-\tau) - \delta(t+\tau)\} \tag{10.17}$$
$$\mathcal{F}[\cos(\tau x)] = \pi\{\delta(t-\tau) + \delta(t+\tau)\} \tag{10.18}$$

11. VÉGE